

## 4. Proof of (2)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 3. THEOREMS OF STICKELBERGER AND DAVENPORT-HASSE

We will make use of the following three classical formulas. First [3, (0.8)],

$$(6) \quad G_{f_m} \left( \chi \frac{q^m - 1}{q - 1} \right) = G_f(\chi)^m,$$

where  $\chi$  is a character on  $GF(q^m)$ . Next [3, (0.9)],

$$(7) \quad 1 = \frac{\chi^l(l)}{G_f(\chi^l)} \prod_{j=0}^{l-1} \frac{G_f(\chi\psi^j)}{G_f(\psi^j)},$$

where  $\chi, \psi$  are characters on  $GF(q)$  and  $\psi$  has order  $l$ . Finally [8], [5, p. 25]

$$(8) \quad \frac{G_f(\chi^\alpha)}{(\zeta - 1)^{s(\alpha)}} \equiv \frac{1}{\gamma(\alpha)} \equiv \frac{(\zeta - 1)^{\alpha - s(\alpha)}}{\alpha!} \pmod{P},$$

where  $\alpha$  is an integer,  $0 \leq \alpha < q - 1$ ;  $s(\alpha)$  denotes the sum of the  $p$ -adic digits of  $\alpha$ ;  $\gamma(\alpha)$  denotes the product of the factorials of the  $p$ -adic digits of  $\alpha$ ;  $P$  is a prime ideal above  $p$  in the ring  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega]$ , where  $\omega = \exp(2\pi i/p(q-1))$ ; and  $\chi$  is the character on  $\mathcal{O}/P \approx GF(q)$  of order  $q - 1$  which maps the coset  $\omega + P$  to  $\bar{\omega}$ .

## 4. PROOF OF (2)

Let  $\eta$  denote the right side of (2). We must show that  $\eta = 1$ . Let  $\delta = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ,  $\theta = w^{k-1}(cw + i_j)$ . Using (6), we have

$$\eta^n = \frac{\chi^{ln}(l) G_{f_n}(\chi^\delta)}{G_{f_n}(\chi^{\delta l})} \prod_{j=1}^e \prod_{k=1}^r \prod_{c=1}^{w^{r-k}} \frac{G_{f_n}^n(\chi^\delta \psi^\theta)}{G_{f_n}^n(\psi^\theta)}.$$

Consider a fixed pair  $j, k$ . For each  $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $G_{f_n}(\psi^\theta) = G_{f_n}(\psi^{\theta q^a})$ , so

$$\prod_{c=1}^{w^{r-k}} G_{f_n}(\psi^\theta) = \prod_{c=1}^{w^{r-k}} G_{f_n}(\psi^{w^{k-1}(cw + i_j q^a)}).$$

Similarly,

$$\prod_{c=1}^{w^{r-k}} G_{f_n}(\chi^\delta \psi^\theta) = \prod_{c=1}^{w^{r-k}} G_{f_n}(\chi^\delta \psi^{w^{k-1}(cw + i_j q^a)}).$$

Thus

$$(9) \quad \eta^n = \frac{\chi^{ln}(l) G_{fn}(\chi^\delta)}{G_{fn}(\chi^{\delta l})} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{G_{fn}(\chi^\delta \psi^j)}{G_{fn}(\psi^j)}.$$

Since  $n \equiv \delta \pmod{q-1}$ ,  $\chi^{ln}(l) = \chi^{\delta l}(l)$ . Therefore, by (7), the right side of (9) equals 1, so

$$(10) \quad \eta^n = 1.$$

By the definition of  $\eta$  and of Gauss sums,

$$\eta^l \equiv \frac{\chi^{l^2}(l) \bar{\chi}^l(l) G_f(\chi^l)}{G_f^l(\chi^l)} \prod_{j=1}^e \prod_{k=1}^r \prod_{c=1}^{w^{r-k}} \frac{\bar{\chi}^{\delta l}(l) G_{fn}(\chi^{\delta l})}{1} \pmod{w},$$

so

$$\eta^l \equiv \frac{\chi^{l^2-l-l\delta(l-1)/n}(l) G_{fn}^{(l-1)/n}(\chi^{\delta l})}{G_f^{l-1}(\chi^l)} \pmod{w}.$$

By (6),  $G_{fn}(\chi^{\delta l}) = G_f^n(\chi^l)$ ; hence

$$(11) \quad \eta^l \equiv 1 \pmod{w}.$$

Thus  $w$  divides the norm  $N(\eta^l - 1)$ . By (10),  $\eta^l$  is an  $n$ -th root of unity. Thus if  $\eta^l - 1 \neq 0$ , then  $N(\eta^l - 1)$  divides  $n$ , which contradicts the fact that  $w + n$ . Therefore  $\eta^l = 1 = \eta^n$ , so since  $(l, n) = 1$ ,  $\eta = 1$ .

### 5. PROOF OF (3)

Let  $\eta$  denote the right side of (3). We assume that  $0 < \alpha < q - 1$ . To see that this presents no loss of generality, we now show that  $\eta$  is unchanged when  $\alpha$  is replaced by  $\alpha + (q-1)j$ , where  $j$  is an integer. Clearly  $G_f(\chi^\alpha)$  and  $\chi^\alpha(l)$  are unchanged, since the restriction  $\chi|_{GF(q)}$  has order  $q - 1$ . Finally,  $G_{fl}(\chi^{\alpha\beta})$  is also unchanged, as

$$(12) \quad G_{fl}(\chi^{\alpha\beta}) = G_{fl}(\chi^{\alpha\beta q^j}) = G_{fl}(\chi^{\beta(\alpha+j(q-1))}),$$

where  $\alpha_j$  is defined by  $\alpha_j \alpha \equiv j \pmod{l}$ ,  $\alpha_j \geq 0$ .

Let  $\psi = \chi^{\beta(q-1)}$ . Using (6), we have

$$\eta^l = \frac{G_{fl}(\chi^{\alpha\beta l})}{\chi^{\alpha l}(l) G_{fl}^l(\chi^{\alpha\beta})} \prod_{j=1}^{l-1} G_{fl}(\psi^j).$$