Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS

ABSTRACT. Let $\omega(n)$ be the number of prime factors of n; n is said ω-largely composite if $m \leqslant n \Rightarrow \omega(m) \leqslant \omega(n)$.

The quantity $Q_l(X)$ of such numbers $\leqslant X$ verifies $e^{c_1\sqrt{\log X}} \leqslant Q_l(X) \leqslant e^{c_2\sqrt{\log X}}$. Then we prove

$$\text{card}\left\{n \leqslant x \mid \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}\right\} = x^{1-c+o(1)}$$

and if $\Omega(n)$ is the total number of prime factors of n counted according to multiplicity, $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \dfrac{\log n}{\log 2}(1+o(1))$.

An integer n is defined ω-interesting if

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

A short study of these numbers is given. We prove that there exists infinitely many strangulation points (n_k) for the function $n - \omega(n)$

i.e. such that: $\quad m < n_k \Rightarrow m - \omega(m) < n_k - \omega(n_k)$

and $\quad m > n_k \Rightarrow m - \omega(m) > n_k - \omega(n_k)$

Finally, we deduce from some formula of A. Selberg the exact order of card $\{n \leqslant x \mid \omega(n) > \alpha \log \log x\}$ for $\alpha > 1$.

INTRODUCTION

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n. On définit $\omega(n) = k$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. Les fonctions ω et Ω sont additives: une fonction f est additive si $(m, n) = 1$ entraine $f(mn) = f(m) + f(n)$. Hardy et Ramanujan (cf. [Har]) ont démontré en 1917 que la valeur moyenne de $\omega(n)$ était $\log\log n$. En 1934, P. Turan donnait une démonstration simple de ce résultat, en prouvant: (cf. [Tur])

$$\sum_{n=1}^{x} (\omega(n) - \log\log x)^2 = O(x \log\log x) .$$

En 1939, M. Kac et P. Erdös démontraient (cf. [Kac]):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{card} \{ n \leqslant x ; \omega(n) \leqslant \log\log x + t\sqrt{\log\log x} \}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du.$$

Ensuite, P. Erdös ([Erd 1]) et L. G. Sathe ([Sat]) s'intéressaient aux entiers $n \leqslant x$ tels que $\omega(n)$ soit de l'ordre de $c \log\log x$. A. Selberg ([Sel 1]) donnait la « formule de Selberg »

$$\sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = z F(z) x (\log x)^{z-1} + o\left(x (\log x)^{\operatorname{Re}(z-2)}\right) \tag{1}$$

où pour $R > 0$, le O est uniforme pour $|z| \leqslant R$; $F(z)$ est la fonction entière

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z .$$

Cette formule permet d'obtenir plus simplement les résultats de Sathe. Dans la proposition 3, nous suivrons les idées de A. Selberg pour calculer un équivalent de:

$$\operatorname{card} \{ n \leqslant x \mid \omega(n) > \alpha \log\log x \} , \qquad \alpha > 1 .$$

La formule (1) a été étendue par H. Delange (cf. [Del 1] et [Del 2]).

Soit p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et posons $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$. Ce nombre A_k est le plus petit entier naturel n tel que $\omega(n) = k$. On dit que n est ω-hautement composé si $m < n \Rightarrow \omega(m) < \omega(n)$. La suite des nombres ω-hautement composés est la suite A_k.

A l'aide du théorème des nombres premiers, on a: $\log A_k \sim p_k \sim k \log k$; on en déduit que pour tout n (cf. [Wri], ch. XVIII):

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n} (1 + o(1))$$

et que $Q_h(X)$ le nombre de nombres ω-hautement composés $\leqslant X$ vérifie:

$$Q_h(X) \sim \frac{\log X}{\log\log X} .$$

On dit maintenant que $n \geqslant 2$ est ω-largement composé, si $1 \leqslant m \leqslant n \Rightarrow \omega(m) \leqslant \omega(n)$. Si $A_k \leqslant n < A_{k+1}$, n est ω-largement composé si et seulement si $\omega(n) = k$. Soit $Q_l(X)$ le nombre de nombres ω-largement composés $\leqslant X$. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Il existe deux constantes* $0 < c_1 < c_2$ *telles que:*

$$\exp\left(c_1 \sqrt{\log X}\right) \leqslant Q_l(X) \leqslant \exp\left(c_2 \sqrt{\log X}\right).$$

Nous démontrerons ensuite:

THÉORÈME 2. *Soit* c, $0 < c < 1$. *On a:*

$$f_c(x) = \operatorname{card}\left\{ n \leqslant x \,;\, \omega(n) > \frac{c \log x}{\log\log x} \right\} = x^{1-c+o(1)}.$$

Entre les résultats obtenus par la formule de Selberg et le théorème 2, il y a un trou à boucher, pour estimer par exemple: card $\{n \leqslant x \mid \omega(n) > (\log x)^{\alpha}\}$, $0 < \alpha < 1$. Kolesnik et Straus (cf. [Kol]) ont donné une formule asymptotique assez compliquée qui fournit partiellement une solution à ce problème.

Nous nous intéresserons ensuite aux valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$, pour quelques fonctions arithmétiques f. Nous démontrerons en particulier:

THÉORÈME 3. *On a, pour* $n \to +\infty$:

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \frac{\log n}{\log 2}\left(1 + o(1)\right).$$

Au paragraphe IV, nous disons qu'un nombre n est ω-intéressant si:

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Cette définition caractérise une famille de nombres n qui ont beaucoup de facteurs premiers, en les comparant avec des nombres m plus grands que n (contrairement à la définition des nombres hautement composés). Nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on dit qu'une fonction f a un point d'étranglement en n, si

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) \qquad \text{et} \qquad m > n \Rightarrow f(m) > f(n).$$

Interprétation géométrique: Le graphe de f, contenu dans l'angle droit de sommet $(n, f(n))$ et de côté parallèle aux axes, s'étrangle en n. Nous démontrerons:

THÉORÈME 4. *La fonction $n \to n - \omega(n)$ a une infinité de points d'étranglement.*

Pour démontrer ce théorème, nous construirons une infinité de points n tels qu'il existe juste avant n, une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

§ 1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Minoration: D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) il existe entre $(1-2\varepsilon) \log X$ et $(1-\varepsilon) \log X$ un nombre x tel que:

$$\pi(x+f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \qquad \text{et} \qquad \pi(x) - \pi(x-f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x}$$

pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $\frac{f(x)}{x}$ décroisse et tende vers 0.

On choisit $f(x) = c\sqrt{x} \log x$. Soit k tel que $p_k \leqslant x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres:

$$n = A_{k-r} q_1 \dots q_r, \qquad 0 \leqslant r \leqslant s$$

où $q_1, \dots, q_r$ sont des nombres premiers distincts choisis parmi $p_{k+1}, \dots, p_{k+s}$.

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$ et il y en a 2^s. De plus ils vérifient:

$$n \leqslant A_k \left(\frac{p_{k+s}}{p_{k-s}} \right)^s .$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leqslant x + f(x)$ et $p_{k-s} \geqslant x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \frac{f(x)}{\log x}$. On a alors:

$$\log \frac{n}{A_k} \leqslant s \log \frac{x+f(x)}{x-f(x)} \lesssim 2c^2 \log x .$$