2. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS SUR LES ACTIONS DE GROUPES ET LES GRAPHES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

agit sur un arbre avec un élément qui agit sans sommet fixe admet une structure bipolaire. Or un produit amalgamé non-trivial ou une HNN-extension agit toujours sur un arbre de cette façon par la réciproque du théorème de Bass-Serre cité plus haut. L'autre direction s'obtient par un usage de nos critères.

Les résultats présentés ici constituèrent quelques chapitres d'un cours de 2[e] cycle donné par l'auteur à l'université de Genève pendant l'année académique 1979-1980. Je tiens à remercier P. de la Harpe pour de très utiles conversations.

2. Définitions et généralités sur les actions de groupes et les graphes

(2.1) Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Sauf mention du contraire, une telle action est toujours à gauche. L'ensemble des orbites est noté $G \backslash X$. Pour $x \in X$, on définit comme de coutume le *groupe d'isotropie* G_x de x:

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

et on dit que l'action est *libre* si $G_x = \{ 1 \}$ pour tout $x \in X$. Un sous-ensemble de X qui contient exactement un représentant par orbite est appelé un *ensemble de représentants* pour l'action de G sur X.

(2.2) Un *graphe* Γ est une paire d'ensembles (Som Γ, Ar Γ), appelés l'ensemble des *sommets* et l'ensemble des *arêtes* de Γ, munis de deux applications $o, e : \mathrm{Ar}\,\Gamma \to \mathrm{Som}\,\Gamma$ (*origine* et *extrémité*). Comme d'habitude, on rend compte de cette donnée par un dessin où une arête a est un arc orienté allant de $o(a)$ à $e(a)$; ce dessin correspond à la réalisation géométrique du graphe qui est un CW-complexe de dimension 1.

Une action d'un groupe G sur un graphe Γ est une action de G sur Som Γ et sur Ar Γ telle que

$$o(ga) = go(a) \qquad \text{et} \qquad e(ga) = ge(a)$$

pour tout $a \in \mathrm{Ar}\,\Gamma$ et tout $g \in G$. Les applications o et e passent alors aux quotients $G \backslash \mathrm{Som}\,\Gamma$ et $G \backslash \mathrm{Ar}\,\Gamma$ ce qui donne un *graphe quotient* $G \backslash \Gamma$.

(2.3) *Chemins dans un graphe.* On appelle CH_n tout graphe satisfaisant à:

$$\mathrm{Som}\, CH_n = \{ 0, 1, 2, \ldots, n \}$$
$$\mathrm{Ar}\, CH_n = \{ [0, 1], [1, 2], \ldots, [n-1, n] \} \text{ N}$$

$$\{ o([k-1, k]), e([k-1, k]) \} = \{ k-1, k \}$$

FIG. 1. — Deux graphes de type CH_4

Un *chemin (de longueur n)* dans un graphe Γ est un morphisme de graphe $c : CH_n \to \Gamma$. Si a et $b \in$ Som Γ sont dans l'image de Som CH_n par c, on dit que le chemin c relie a à b. Cette notion de chemin définit celle de *connexité* et de *composante connexe* d'un graphe.

Le lecteur aura remarqué la non-unicité du modèle CH_n, qui provient bien entendu de ce que nous travaillons dans la catégorie des graphes orientés. On peut contourner cette difficulté technique en doublant formellement chaque arête, comme dans [Se]. Mais cela rendrait d'autres points plus compliqués et notre solution, malgré cette petite imperfection formelle, nous a paru permettre une exposition plus légère.

(2.4) Si U et V sont deux sous-ensembles de Som Γ, la *distance* $d(U, V)$ entre U et V est l'entier positif ou nul définit comme le minimum des longueurs de chemins reliant un point de U à un point de V. Pour $u, v \in$ Som Γ, on usera des allègements de notation :

$$d(u, V) = d(\{u\}, V) \quad \text{et} \quad d(u, v) = d(\{u\}, \{v\}).$$

(2.4) PROPOSITION. *Soit* G *un groupe agissant sur un graphe connexe* Γ, *et soit* $U \subset$ Som Γ *un ensemble de représentants pour l'action de* G *sur* Som $\bar{\Gamma}$ *Soit* $u \in U$. *Alors* G *est engendré par* $G_u \cup R_U$, *où* R_U *est défini par :*

$$R_U = \{ r \in G \mid \text{il existe } a \in \text{Ar}\,\Gamma \text{ telle que } o(a) \in U \text{ et } e(a) \in rU \}$$

Démonstration. Soit H le sous-groupe de G engendré par $G_u \cup R_U$. Soit $g \in G$. On va démontrer que $g \in H$ par récurrence sur la distance $d(U, gu)$. Si $d(U, gu) = 0$, cela signifie que $gu \in U$. Comme U est un ensemble de représentants, cela n'est possible que si $gu = u$, auquel cas $g \in G_u \subset H$.

Prenons donc comme hypothèse de récurrence que $h \in H$ pour tout $h \in G$ tel que $d(U, hu) \leqslant d$. Soit $g \in G$ satisfaisant à $d(U, gu) = d+1$. Soit $c : CH_{d+1} \to \Gamma$ un chemin reliant $v \in U$ à gu. On a alors $c(\{0, 1\}) = \{v, x\}$, avec $x \notin U$. Soient $r \in G$ et $p \in U$ tels que $x = rp$, et dénotons par a l'arête $c([0, 1]) \in$ Ar Γ.

Supposons que $e(a) = x$. Par hypothèse, on a alors $r \in R_U$. Le chemin $c' : CH_d \to \Gamma$ défini par $c'(k) = r^{-1} c(k+1)$ sur les sommets et

$$c'([k, k+1]) = c([k+1, k+2])$$

sur les arêtes relie $p \in U$ à $r^{-1}gu$. On en déduit par l'hypothèse de récurrence que $r^{-1}g \in H$, d'où $g \in H$.

Dans le cas où $o(a) = x$, on a alors $r^{-1} \in R_U$ puisque $o(r^{-1}a) = p$ et $e(r^{-1}a) = r^{-1}p$. Le même raisonnement que précèdemment montre que $rg \in H$, d'où $g \in H$. ■

(2.5) *Arbres.* Un *arbre* Γ est un graphe connexe tel que pour toute arête a de Γ, le sous-graphe maximal Γ_a de Γ qui ne contient pas l'arête a est non-connexe. On vérifie alors que Γ_a est formé de deux composantes connexes, l'une contenant $o(a)$ et l'autre contenant $e(a)$. Nous appelerons $\mathscr{B}(a)$ la composante connexe de Γ_a qui contient $e(a)$ (« *branches* de a ») et $\mathscr{R}(a)$ (« *racines* de a ») celle où se trouve $o(a)$. (L'arête a est momentanément pressentie comme étant le « tronc » de l'arbre). Les sous-graphes $\mathscr{B}(a)$ et $\mathscr{R}(a)$ sont des sous-arbres de Γ. Si g est un automorphisme de Γ, on a $g\mathscr{B}(a) = \mathscr{B}(ga)$ et $g\mathscr{R}(a) = \mathscr{R}(ga)$.

Notre définition d'un arbre est évidemment équivalente à celle plus courante d'un graphe sans circuit ou d'un graphe dont la réalisation géométrique est contractile.

(2.6) *Chaînes infinies.* On définit les graphes CH_∞ de la même manière que CH_n, sauf que Som $CH_\infty = \mathbf{Z}$. Une *chaîne infinie* d'un graphe Γ est un morphisme $c : CH_\infty \to \Gamma$ qui est injectif sur les ensembles de sommets et d'arêtes (condition qui n'est pas requise dans la définition d'un chemin).

(2.7) Si G est un groupe qui agit sur un graphe connexe Γ, on peut toujours trouver un ensemble de représentants de l'action de G sur Som Γ qui soit l'ensemble des sommets d'un sous-arbre A de Γ. C'est un relevé d'un arbre maximal de $G\backslash\Gamma$. Pour une démonstration de ces faits, voir [Se, § 3]. L'arbre A s'appelle un *arbre de représentants*, mais nous attirons l'attention du lecteur que Ar A n'est pas un ensemble de représentants pour l'action de G sur Ar Γ.