1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

par Gérald TENENBAUM

1. INTRODUCTION

Soit E un ensemble non vide de nombres premiers. Pour tout entier naturel positif n, désignons par $\Omega_E(n)$ et par $\omega_E(n)$ le nombre des facteurs premiers de n qui appartiennent à E, comptés respectivement avec et sans leur ordre de multiplicité. Dans le cas où E est l'ensemble de tous les nombres premiers nous écrivons $\Omega_E(n) = \Omega(n)$ et $\omega_E(n) = \omega(n)$.

Pour toute suite d'entiers $\mathscr{A}$, nous notons A la fonction sommatoire définie par

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad A(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \\ \operatorname{card}\{n \leqslant x : n \in \mathscr{A}\} \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 . \end{cases}$$

Enfin, étant données une suite d'entiers $\mathscr{A}$ et une fonction arithmétique à valeurs entières g, nous notons

$$g^{-1}(\mathscr{A}) = \{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : g(n) \in \mathscr{A}\}$$

la suite croissante des entiers positifs n tels que $g(n)$ appartienne à $\mathscr{A}$.

Hubert Delange a montré dans [1] que, si $\mathscr{A}$ est une progression arithmétique et si $g = \Omega$ ou ω, alors $g^{-1}(\mathscr{A})$ possède une densité naturelle qui est celle de $\mathscr{A}$ [1]). Jean-Marc Deshouillers [3] a généralisé ce résultat au cas où la suite $\mathscr{A}$ vérifie

$$A(x) = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

---

[1]) Dans le cas de la fonction Ω, ce résultat avait déjà été établi par S. S. Pillai « Generalization of a theorem of Mangoldt » *Proc. Indian Acad. Sc. Sect. A*, *11* (1940), 13-20.

pour un certain α de l'intervalle [0, 1]. Il a également montré, dans le cas où $\mathscr{A}$ est de densité inférieure nulle, que $\Omega^{-1}(\mathscr{A})$ ou $\omega^{-1}(\mathscr{A})$ possède une densité (nécessairement nulle) si et seulement si l'on a

$$(\forall c > 0) \qquad A(x + c\sqrt{x}) = A(x) + o(\sqrt{x}) .$$

Nous nous proposons d'étendre ces résultats de la manière suivante:

THÉORÈME 1. *Soit* E *un ensemble de nombres premiers tel que*

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty .$$

On pose $g = \Omega_E$ *ou* $g = \omega_E$.

Alors, une condition nécessaire et suffisante sur la suite $\mathscr{A}$ *pour que* $g^{-1}(\mathscr{A})$ *possède une densité naturelle est l'existence d'un réel* α *de* $[0,1]$ *tel que*

$$(1) \qquad (\forall c > 0) \qquad A(x + c\sqrt{x}) - A(x) = c\,\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) .$$

De plus, dans ce cas, les suites $\mathscr{A}$ *et* $g^{-1}(\mathscr{A})$ *ont pour densité* α.

Rappelons qu'une suite complexe $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers un nombre complexe α au sens de Borel si l'on a pour x infini

$$(2) \qquad e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha + o(1) .$$

En posant, pour $x \geqslant 0$,

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n ,$$

on voit que la relation (2) équivaut à la relation

$$(3) \qquad e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} dA(t) = \alpha + o(1)$$

où Γ désigne la fonction eulérienne.

Moins par souci de généralité que de commodité et clarté d'exposition, nous avons préféré le cadre de l'intégrale de Stieltjes à celui des séries. Ainsi, l'espace des suites complexes disparaîtra-t-il au profit de celui des fonctions à valeurs complexes et à variation bornée sur tout intervalle borné (nous noterons $\mathscr{V}$ cet espace fonctionnel) et la notion de convergence au sens de Borel sera-t-elle utilisée sous la forme (3).

La première étape de la preuve du théorème 1 consiste à remarquer que l'existence d'une densité naturelle α pour $g^{-1}(\mathscr{A})$ équivaut à la convergence vers α au sens de Borel de la fonction caractéristique de $\mathscr{A}$, ce que nous énonçons sous la forme suivante:

THÉORÈME 2. *Si E, g et $\mathscr{A}$ gardent la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, alors la relation* (3) *est une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $g^{-1}(\mathscr{A})$ possède la densité α.*

On voit maintenant que le théorème 1 est une conséquence de l'équivalence des conditions (1) et (3) pour toute fonction A de la forme $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ où a_n vaut 0 ou 1.

En supposant seulement la suite (a_n) bornée, H. Delange [2] a trouvé de ce résultat une démonstration courte et élégante utilisant la densité dans $L^1(\mathbf{R})$ du sous-espace vectoriel engendré par la famille des fonctions $u \mapsto \exp\left\{ -\frac{1}{2}(u-h)^2 \right\}$, h décrivant $\mathbf{R}$. De plus il a remarqué que l'on peut déduire l'équivalence de (1) et (3):

- pour la fonction sommatoire d'une suite (a_n) bornée, d'un théorème taubérien général de Karamata (cf. [9], théorème II, page 127, appliqué avec $A(t) = e^{\sqrt{t}}$)
- pour la fonction sommatoire d'une suite (a_n) majorée ou minorée, d'un résultat de Wiener et Martin (cf. [12], théorèmes 1 et 2 appliqués avec $F(x) = e^x$ et en remplaçant a_n par $\frac{a_n}{n\,!}$) utilisant un théorème taubérien de Wiener [11].

Nous avons obtenu les résultats suivants par une méthode directe, inspirée pour la partie taubérienne de celle de Hardy et Littlewood dans [6].

THÉORÈME 3. *Pour toute fonction A de $\mathscr{V}$ la relation* (1) *implique la relation* (3).

THÉORÈME 4. *Soit A une fonction de $\mathscr{V}$.*

S'il existe un nombre complexe β et une fonction $x \mapsto B(x)$ satisfaisant à la relation

$$(\forall c > 0) \qquad B(x + c\sqrt{x}) - B(x) = c\beta\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

tels que la fonction $x \mapsto A(x) + B(x)$ soit à parties réelle et imaginaire monotones, alors la relation (3) *implique la relation* (1).

Remarquons que la classe des fonctions $x \mapsto B(x)$ satisfaisant à la condition du théorème 4 est assez étendue; elle contient en effet toutes les fonctions du type

$$B(x) = B_1(x) + o(\sqrt{x})$$

où B_1 est une fonction dérivable telle que, quand x tend vers l'infini,

$$B_1'(x) = \beta + o(1)\,.$$

Dans le cas où A est la fonction sommatoire d'une suite a_n, on obtient, en prenant $B(x) = \lambda\,[x]$, le corollaire suivant qui, associé aux théorèmes 2 et 3, implique le théorème 1.

COROLLAIRE. *Soit (a_n) une suite de nombres réels. S'il existe un nombre réel λ tel que l'on ait pour n assez grand*

$$a_n \geqslant -\lambda$$

et si (a_n) tend vers α au sens de Borel, soit

$$(B) \qquad \lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha$$

alors on a

$$(C) \qquad (\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\,\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x})\,.$$

Il était connu depuis longtemps (voir [6]) que la condition

$$\sum_{n \leq x} a_n = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

(qui implique (C)) est suffisante pour assurer la convergence de (a_n) vers α au sens de Borel. Cependant, nous n'avons trouvé nulle part, dans la littérature consacrée à ce sujet, explicitement énoncé, un théorème d'équivalence des conditions (B) et (C).

Le théorème suivant montre que la restriction $a_n \geqslant -\lambda$ à laquelle est assujettie l'implication (B) $\Rightarrow$ (C) est optimale.

THÉORÈME 5. *Pour toute fonction réelle* $t \mapsto \psi(t)$ *tendant vers l'infini il existe une suite réelle* (a_n) *satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*

(a) $\quad (\forall n \in \mathbf{N}) \ |a_n| \leqslant \psi(n)$

(b) $\quad (a_n)$ *tend vers* 0 *au sens de Borel*

(c) *Pour toute constante positive* c *l'expression* $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\sum_{x \leqq n < x + c\sqrt{x}} a_n$ *ne tend pas vers* 0 *lorsque* x *tend vers l'infini.*

2. Un lemme utile

Pour tout couple (x, t) de réels positifs, nous posons:

$$\varphi(x, t) = e^{-x} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

L'énoncé ci-dessous rassemble les principales propriétés de la fonction $\varphi(x, t)$. La démonstration, utilisant la formule de Stirling et d'autres résultats classiques concernant la fonction Γ, est laissée au lecteur.

LEMME 1.

(i) *pour* $x > 0$ *et* $|t - x| \leqslant x^{2/3}$, *on a :*

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2x}\right\}\left(1 + O\left(\frac{1+|t-x|}{x}\right) + O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right)\right)$$

(ii) *pour* $x > 0$ *et* $|t - x| \leqslant \frac{x}{2}$ *on a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = O\left(\frac{1+|t-x|}{x} \cdot \varphi(x, t)\right)$$

(iii) *pour tout réel positif* x, *la fonction partielle* $t \mapsto \varphi(x, t)$ *est positive et atteint son maximum absolu en un point* $t(x)$ *de l'intervalle* $[x - 1, x]$;