

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES

par Michel SAVOYANT

## NOTATIONS

- $\mathbf{C}$  désigne le plan complexe; si  $F \subset \mathbf{C}$ ,  $\partial F$  est la frontière de  $F$ ,  $\bar{F}$  l'adhérence de  $F$ .
- $\Delta(z_0, r)$  est le disque ouvert de centre  $z_0$  et de rayon  $r > 0$ . On notera  $\Delta = \Delta(0, 1)$ .
- Si  $f$  est une fonction complexe bornée définie sur  $F$  on note  $\|f\|_F = \sup_{z \in F} |f(z)|$ .

Soit  $G$  un ouvert borné de  $\mathbf{C}$ .

- $H^\infty(G)$  est l'algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur  $G$  avec la norme  $\|f\|_G$ .
- $A(G)$  est l'algèbre uniforme des fonctions continues sur  $\bar{G}$  et analytique dans  $G$ .

## 1. INTRODUCTION

Soit  $G$  un ouvert borné de  $\mathbf{C}$  et  $B$  un sous-ensemble de  $H^\infty(G)$ : on note  $B(G)$  l'ensemble des fonctions de  $H^\infty(G)$  qui sont limites ponctuelles sur  $G$  d'une suite bornée d'éléments de  $B$ ; nous nous intéressons au problème suivant: quand  $B(G)$  est-il fermé dans  $H^\infty(G)$ ? Lorsque  $B = A(G)$  ou (avec une hypothèse supplémentaire sur  $\partial G$ ) lorsque  $B$  est l'ensemble des fractions rationnelles avec pôles hors de  $\bar{G}$ , A. M. Davie ([3]) a montré que  $B(G)$  est fermé dans  $H^\infty(G)$ ; nous étudions ici le cas où  $B = P$ , l'algèbre des polynômes. Rubel et Shields ([7] th 4.1) ont montré qu'en général  $P(G)$  n'est pas fermé dans  $H^\infty(G)$ ; dans ce travail nous donnons une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que  $P(G)$  le soit lorsque  $G$  est connexe. Avant d'énoncer le résultat principal nous donnons deux définitions.

1.1. *Définition.* Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{C}$ . L'enveloppe de Carathéodory de  $\Omega$  est l'intérieur du complémentaire de la composante connexe non bornée du complémentaire de  $\bar{\Omega}$ . On note  $\Omega^*$  cet ouvert.

1.2. *Définition.* Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  et  $S$  un sous-ensemble ouvert de  $\Omega$ ; un point  $\zeta \in \partial\Omega$  est dit accessible (resp. accessible à partir de  $S$ ) s'il existe un chemin continu  $z = \gamma(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) tel que:  $\gamma(t) \in \Omega$  (resp.  $\in S$ ) pour  $t \in [0, 1[$  et  $\gamma(1) = \zeta$ .

Nous démontrons le théorème suivant:

1.3. THÉORÈME. Soient  $G$  un ouvert connexe borné de  $\mathbf{C}$ ,  $G^*$  son enveloppe de Carathéodory,  $U$  la composante connexe de  $G^*$  contenant  $G$ , et  $G' = U \setminus \bar{G}$ . Alors  $P(G)$  est fermé dans  $H^\infty(G)$  si et seulement si l'ensemble des points de  $\partial U$  accessibles à partir de  $G'$  est au plus dénombrable.

Nous aurons à utiliser le théorème suivant qui caractérise les éléments de  $P(G)$ : (cf. [5], p. 151 ou [7] pour une démonstration).

1.4. THÉORÈME. Une fonction  $f \in H^\infty(G)$  est dans  $P(G)$  si et seulement s'il existe une fonction  $F \in H^\infty(G^*)$  tel que  $F \equiv f$  sur  $G$ .

Nous donnerons aussi des conditions suffisantes, portant seulement sur  $G^*$ , pour que  $P(G)$  soit fermé dans  $H^\infty(G)$ .

## 2. ENSEMBLES DOMINANTS

2.1. *Définition.* Soit  $G$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ , et  $S$  un sous-ensemble de  $G$ . On dit que  $S$  est dominant dans  $G$  si  $\|f\|_S = \|f\|_G$  pour toute  $f$  dans  $H^\infty(G)$ .

La proposition suivante justifie l'introduction de cette définition.

2.2. PROPOSITION. Soient  $G$  un ouvert connexe borné de  $\mathbf{C}$ , et  $U$  la composante connexe de  $G^*$  qui contient  $G$ . Alors  $P(G)$  est fermé dans  $H^\infty(G)$  si et seulement si  $G$  est dominant dans  $U$ .

*Preuve.* Si  $G$  est dominant dans  $U$ , l'application restriction de  $H^\infty(U)$  dans  $H^\infty(G)$  est une isométrie, et donc l'ensemble  $\{f|_G : f \in H^\infty(U)\}$  est fermé dans  $H^\infty(G)$ ; cet ensemble coïncide avec  $P(G)$  d'après le théorème 1.4.

Réciproquement supposons  $P(G)$  fermé dans  $H^\infty(G)$ ; l'application restriction précédente est un homomorphisme continu bijectif de l'algèbre