

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRES ALGÈBRIQUES ET THÉORIE DES AUTOMATES
Autor: France, Michel Mendes
Kapitel: § 2. La suite de Morse
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51067>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

lieu, « suite au hasard » pourrait signifier une suite qui ne peut pas être engendrée par une méthode « mécaniste » du type machine de Turing. Cet aspect est lié aux travaux de Kolmogoroff [8] et de Martin Löf [10] (on pourra se reporter à Schnorr [16] ou Dellacherie [6]).

Nous montrons ici que la réponse au problème 1 est positive *à condition* de considérer les opérations sur $\mathbf{R}$ *sans retenues* respectivement par rapport aux bases g_1 et g_2 . En relation avec le problème 2, nous montrons en quoi la conjecture suivante est hautement probable et sans doute accessible (nous espérons en donner une preuve bientôt).

CONJECTURE. *Si*

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g^n}$$

est un nombre réel algébrique irrationnel, alors la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ ne peut pas être engendrée par un g -automate.

Nous définissons le g -automate plus loin.

§ 2. LA SUITE DE MORSE

Les différents concepts dont nous aurons besoin seront introduits via la suite de Morse dont nous donnons plusieurs définitions.

Définition 1. A l'entier $n \geq 0$, on associe son développement binaire

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) 2^k = \dots e_2(n) e_1(n) e_0(n)$$

où $e_k(n) \in \{0, 1\}$ et $e_k(n) = 0$ pour tout $k > \left\lceil \frac{\log n}{\log 2} \right\rceil$. Le nombre d'apparitions du chiffre 1 dans le mot $\dots e_2(n) e_1(n) e_0(n)$ est

$$m_n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)$$

La suite de Morse M est la suite infinie $(m_n) \pmod{2}$ ($n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$). Elle débute donc ainsi

$$M = 0 \ 110 \ 1 \ 00 \ 11 \ 00 \ 10 \ 11 \ 0 \ 1 \ \dots \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}.$$

Définition 2 (automates). On considère l'automate à 2 états x_0 et x_1 dont la fonction de transition est définie par

$$\begin{array}{ll} 0 x_0 = x_0 & 1 x_0 = x_1 \\ 0 x_1 = x_1 & 1 x_1 = x_0 \end{array}$$

L'entier $n \in \mathbf{N}$, $n = e_l e_{l-1} \dots e_1 e_0$ (écrit en base 2) opère sur $x \in \{x_0, x_1\}$ de la façon suivante:

$$n x = (e_l e_{l-1} \dots e_1 e_0) x = (e_l e_{l-1} \dots e_1) (e_0 x).$$

En particulier, $n x_0$ est l'un des deux états x_0 ou x_1 , disons x_{m_n} . La suite (m_n) est la suite de Morse.

L'automate décrit ci-dessus est un 2-automate. Le symbole 2 se réfère au fait que de chaque état partent 2 chemins. Un 2-automate peut avoir autant d'états qu'on voudra, en nombre fini toutefois. Plus généralement, soit $g \geq 2$ un entier. Un g -automate ne diffère du précédent automate que par le nombre de chemins partant de chaque état, ici égal à g . L'entier n , écrit en base g opère alors sur l'état initial x_0 du g -automate. (Pour une théorie générale, voir Eilenberg [7].)

Définition 3 (substitutions). Une substitution σ de $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ dans $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ est une application qui consiste à remplacer dans une suite infinie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ chaque 0 et chaque 1 respectivement par un mot formé de 0 et de 1. Par exemple, considérons la substitution σ qui consiste à remplacer 0 par 01 et 1 par 10. Appliquons-la à la suite de Morse M

$$\begin{array}{cccccccccccccc} M = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \sigma M = & (01) & (10) & (10) & (01) & (10) & (01) & (01) & (10) & (10) & (01) & (01) & (10) & \dots \end{array}$$

On constate que $\sigma M = M$. La suite de Morse est point fixe de la substitution.

La substitution ici considérée est une 2-substitution. Une g -substitution est une substitution où on remplace chaque symbole d'un alphabet fini Σ par un mot appartenant à Σ^g .

Définition 4. Soit F_2 le corps à 2 éléments. Une suite $S \in F_2^{\mathbf{N}}$ peut être considérée comme une série de Laurent formelle

$$S = (\varepsilon_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in F_2((X)).$$

Comme $F_2((X))$ est un corps, on pourra additionner et multiplier les suites. En particulier

$$\begin{aligned}(\varepsilon_n) + (\delta_n) &= (\varepsilon_n + \delta_n) \\ (\varepsilon_n) (\delta_n) &= (\varepsilon_0 \delta_n + \varepsilon_1 \delta_{n-1} + \dots + \varepsilon_n \delta_0).\end{aligned}$$

On dit que $S \in F_2^N \subset F_2((X))$ est algébrique (sur $F_2(X)$) si il existe des polynômes $a_v, a_{v-1}, \dots, a_0 \in F_2[X]$, non tous nuls, tels que

$$a_v S^v + a_{v-1} S^{v-1} + \dots + a_0 = 0$$

Considérons en particulier l'équation quadratique

$$(1+X)^3 S^2 + (1+X)^2 S + X = 0.$$

On vérifie sans peine qu'elle admet deux solutions $S = M$ (suite de Morse) et $S = M + (1+X)^{-1}$. Cette seconde solution s'obtient à partir de M en échangeant les 0 et les 1. Elle a donc la même structure et nous l'appellerons encore suite de Morse. D'une façon générale, nous ne nous intéresserons pas au nom des lettres constitutives. On parlera donc de la suite de Morse construite sur l'alphabet $\{a, b\}$ par exemple.

Avant de formuler notre résultat principal, nous pensons intéressant de signaler deux suites algébriques qui nous semblent remarquables.

EXEMPLE 1 (Rudin [14], Shapiro [15]). Soit $S = (r_n)$ l'une des 2 solutions de l'équation quadratique

$$(1+X)^5 S^2 + (1+X)^4 S + X^2 = 0.$$

La suite S est celle qu'ont trouvée Rudin et Shapiro indépendamment l'un de l'autre et qui vérifie l'inégalité

$$\forall N \geq 1, \quad \forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \left| \sum_{n=1}^N (-1)^{r_n} e^{2i\pi n\theta} \right| \leq 5\sqrt{N}.$$

EXEMPLE 2 (Baum et Sweet [1]). La seule solution de l'équation cubique

$$S^3 + XS + 1 = 0$$

possède la remarquable propriété suivante. Son développement en fraction continue (dans $F_2((X))$) est à quotients partiels bornés. (Dans le corps

des réels, on conjecture que tout nombre algébrique de degré 3 au moins est à quotients partiels non bornés.)

Dans ce qui suit, nous aurons à considérer des corps à $q = p^\mu$ éléments (p premier, $\mu \geq 1$ entier). On dira comme précédemment que $S \in \mathbb{F}_q^N$ est algébrique si $S \in \mathbb{F}_q((X))$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$.

§ 3. LE RÉSULTAT

Soient Ξ et Ξ' deux alphabets finis et soient $T = (t_n) \in \Xi^N$, $T' = (t'_n) \in \Xi'^N$. On dit que T' est une image de T si il existe une application $\alpha: \Xi \rightarrow \Xi'$ telle que pour tout n , $\alpha(t_n) = t'_n$.

THÉORÈME 1. *Soit Ξ un alphabet fini non vide. Soit $T \in \Xi^N$ et soit p un nombre premier. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe $q = p^\mu$ tel que T soit l'image d'un élément algébrique de $\mathbb{F}_q((X))$;*
- (ii) *T est l'image d'une suite engendrée par un p -automate;*
- (iii) *T est l'image d'un point fixe d'une p -substitution.*

L'équivalence entre (ii) et (iii) était connue de Cobham [3]. Dans un autre article, Cobham [2] établit que si une suite est engendrée à la fois par un g_1 -automate et par un g_2 -automate, alors elle est périodique à partir d'un certain rang pourvu que g_1 et g_2 soient multiplicativement indépendants. Ce résultat se traduit donc par le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Soient $q_1 = p_1^{v_1}$ et $q_2 = p_2^{v_2}$ où $p_1 \neq p_2$ (premiers). Soit (ε_n) une suite infinie d'entiers $0 \leq \varepsilon_n < \min \{q_1, q_2\}$. Si*

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in \mathbb{F}_{q_1}((X))$$

est algébrique sur $\mathbb{F}_{q_1}(X)$ et si

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in \mathbb{F}_{q_2}((X))$$

est algébrique sur $\mathbb{F}_{q_2}(X)$, alors S_1 et S_2 sont tous deux rationnels.