5. Représentations primitives

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Par hypothèse, la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$ est sans point fixe non-trivial. Par suite, R vérifie la propriété A, et, utilisant le théorème 3.5, l'on voit qu'il faut démontrer:

$$e(K/F)\big(\alpha(R) + 1\big) \geqslant d(K/F) + \beta(K/F) + 1 .$$

LEMME 4.4. *On a*

$$e(K/F)\big(\alpha(K/F) + 1\big) = d(K/F) + \beta(K/F) + 1 .$$

Démonstration. Rappelons que $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. Par [Se, prop. 4, p. 72], on a

$$d(K/F) = \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - 1) = \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} (|G_i| - 1)$$

d'où

$$d(K/F) + \beta(K/F) + 1 = \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} |G_i| = |G_o| \left(1 + \sum_{i=1}^{\beta(K/F)} \frac{|G_i|}{|G_o|}\right) =$$

$$= |G_o| \big(1 + \varphi_{K/F}(\beta(K/F))\big) = e(K/F)\big(\alpha(K/F) + 1\big) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

4.5 Il suffit donc de démontrer l'inégalité $\alpha(R) \geqslant \alpha(K/F)$, qui est claire puisque la restriction de r à $W_F^{\alpha(K/F)}$, donc aussi celle de R, est non-triviale. De plus, si l'on a $W_F^{\alpha(R)} \subset W_K$, on a $W_F^{\alpha(R)} \subsetneq W_F^{\alpha(K/F)}$ d'où $\alpha(R) > \alpha(K/F)$ et l'inégalité est stricte. C.Q.F.D.

La remarque 1 qui suit [Bu, prop. 2, p. 25] donne aussitôt le corollaire suivant au théorème 4.3:

COROLLAIRE. *Si la restriction de* r *à* P_F *est irréductible, on a*

$$e(K/F)\, a(R) = n\big(d(K/F) + a(\chi_R)\big)$$

et

$$a(\chi_R) > \beta(K/F) + 1 .$$

5. REPRÉSENTATIONS PRIMITIVES

5.1 Nous conservons les hypothèses et notations précédentes. Ainsi r est une représentation projective de W_F, de type galoisien et de degré n. On notera F_1 la plus grande extension modérément ramifiée de F contenue dans le corps centrique K de r, et r_1 la restriction de r à W_{F_1}. Le groupe $G_1 = \mathrm{Gal}(K/F_1)$ est le sous-groupe de ramification sauvage de $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

Nous nous intéressons aux représentations r vérifiant:

1) $n > 1$;

2) r_1 est irréductible.

Ces hypothèses sont vérifiées si r est *primitive* non-triviale (voir [Ko], où l'on trouvera une description des représentations projectives primitives de W_F).

5.2 Comme r_1 est irréductible, sa restriction à P_F l'est aussi. On peut donc appliquer à r et r_1 le corollaire au théorème 4.3.

Soit R un relèvement de r; on notera R_1 la restriction de R à W_{F_1}. Soit ρ un relèvement de r_1. On a alors

$$e(K/F)\,a(R) = n\big(d(K/F) + a(\chi_R)\big)$$

et

$$e(K/F)\,a(\rho) = n\big(d(K/F_1) + a(\chi_\rho)\big)\,.$$

Remarque. De ces deux formules avec $\rho = R_1$, on tire (car $\chi_R = \chi_{R_1}$) $e\,a(R) = n(e-1) + a(R_1)$, où $e = e(F_1/F)$.

Cette dernière égalité peut être généralisée, cf. [He, chap. 7].

De plus l'on a $a(\chi_\rho) > \beta(K/F_1) + 1$.

5.3 Appelons $b(r)$ (resp. $b(r_1)$) le minimum des $a(\chi_R)$ (resp. $a(\chi_\rho)$) quand R (resp. ρ) parcourt l'ensemble des relèvements de r (resp. r_1).

Supposons que l'on ait $b(r) = b(r_1)$. Prenons R tel que $a(\chi_R) = b(r)$. On a alors $a(R) = a(r)$ et $a(R_1) = a(r_1)$, puisque $\chi_{R_1} = \chi_R$. Par suite, on a l'égalité

$$e\,a(r) = n(e-1) + a(r_1)\,.$$

Le théorème suivant généralise légèrement le théorème 1.7 de l'introduction:

THÉORÈME 5.3. *Soit r une représentation projective de W_F, de degré $n > 1$ et de type galoisien. Supposons que r_1 soit irréductible. Alors on a $b(r) = b(r_1)$ et $e\,a(r) = n(e-1) + a(r_1)$, où l'on a posé $e = e(F_1/F)$.*

5.4 *Démonstration.* Il suffit de prouver la première égalité. Mais d'après 5.2, on a $b(r_1) > \beta(K/F_1) + 1$. Le théorème 5.3 est alors une conséquence directe de la proposition suivante:

Proposition 5.4. *Soit r une représentation projective de type galoisien de W_F. Si l'on a $b(r_1) > \beta(K/F_1)$, alors on a $b(r) = b(r_1)$.*

Comme en 4.2, on définit le caractère χ_r de K^N, noyau de la norme de $K^\times$ à $F^\times$. De même, on définit le caractère χ_{r_1} de K^{N_1}, noyau de la norme de $K^\times$ à $F^\times$. Alors $b(r)$ est le plus petit entier $m \geqslant 0$ tel que l'on puisse étendre χ_r en un caractère de $K^\times$ trivial sur U_K^m. Par le lemme d'extension de [Bu, p. 14], c'est aussi le plus petit entier $m \geqslant 0$ tel que χ_r soit trivial sur $K^N \cap U_K^m$. On a un résultat analogue pour r_1.

5.5 Il est clair que χ_{r_1} est la restriction de χ_r à K^{N_1}. Par conséquent, on a $b(r) \geqslant b(r_1)$. Remarquant que χ_r est trivial sur K^I, on voit que la proposition 5.4 découle, de façon évidente du lemme suivant:

Lemme 5.5. *Soit m un entier strictement supérieur à $\beta(K/F_1)$. Alors on a*

$$K^N \cap U_K^m = (K^{N_1} \cap U_K^m) \,.\, (K^I \cap U_K^m)\,.$$

Nous suivrons, pour démontrer ce lemme, l'argument de [Bu, p. 30]. Supposons $m > \beta(K/F_1)$, et prenons $x \in K^N \cap U_K^m$. Le lemme de [Bu, p. 30] nous dit que $H^{-1}(\mathrm{Gal}(F_1/F), U_{F_1}^m)$ est nul. Il nous permet d'écrire

$N_{K/F_1}(x) = \prod_{i=1}^{v} \bar{y}_i^{s_i - 1}$, où les $\bar{y}_i$ appartiennent à $U_{F_1}^{m'}$, m' étant le plus petit entier supérieur ou égal à $\varphi_{K/F_1}(m)$, et où les s_i, $i = 1, \ldots, v$, sont des éléments de G dont les images dans $\mathrm{Gal}(F_1/F)$ engendrent ce groupe.

Comme on a $m > \beta(K/F_1)$, $\bar{y}_i$ est la norme de K à F_1 d'un élément y_i de U_K^m [Se, chap. V, § 6]. On peut donc écrire:

$$x = x' \prod_{i=1}^{v} y_i^{s_i - 1} \quad \text{avec} \quad x' \in U_K^m \quad \text{et} \quad N_{K/F_1}(x') = 1\,.$$

Par suite

$$x \in (U_K^m \cap K^{N_1}) \,.\, (K^I \cap U_K^m)$$

et l'on a

$$K^N \cap U_K^m \subset (U_K^m \cap K^{N_1}) \,.\, (K^I \cap U_K^m)\,,$$

d'où l'égalité puisque l'inclusion dans l'autre sens est évidente. Ceci prouve le lemme 5.5 et donc le théorème 5.3.