

5. Représentations primitives

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Par hypothèse, la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$ est sans point fixe non-trivial. Par suite, R vérifie la propriété A , et, utilisant le théorème 3.5, l'on voit qu'il faut démontrer:

$$e(K/F)(\alpha(R) + 1) \geq d(K/F) + \beta(K/F) + 1.$$

LEMME 4.4. *On a*

$$e(K/F)(\alpha(K/F) + 1) = d(K/F) + \beta(K/F) + 1.$$

Démonstration. Rappelons que $G = \text{Gal}(K/F)$. Par [Se, prop. 4, p. 72], on a

$$d(K/F) = \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - 1) = \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} (|G_i| - 1)$$

d'où

$$\begin{aligned} d(K/F) + \beta(K/F) + 1 &= \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} |G_i| = |G_0| \left(1 + \sum_{i=1}^{\beta(K/F)} \frac{|G_i|}{|G_0|} \right) = \\ &= |G_0| (1 + \varphi_{K/F}(\beta(K/F))) = e(K/F)(\alpha(K/F) + 1) \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

4.5 Il suffit donc de démontrer l'inégalité $\alpha(R) \geq \alpha(K/F)$, qui est claire puisque la restriction de r à $W_F^{\alpha(K/F)}$, donc aussi celle de R , est non-triviale. De plus, si l'on a $W_F^{\alpha(R)} \subset W_K$, on a $W_F^{\alpha(R)} \subsetneq W_F^{\alpha(K/F)}$ d'où $\alpha(R) > \alpha(K/F)$ et l'inégalité est stricte. C.Q.F.D.

La remarque 1 qui suit [Bu, prop. 2, p. 25] donne aussitôt le corollaire suivant au théorème 4.3:

COROLLAIRE. *Si la restriction de r à P_F est irréductible, on a*

$$e(K/F) a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$

et

$$a(\chi_R) > \beta(K/F) + 1.$$

5. REPRÉSENTATIONS PRIMITIVES

5.1 Nous conservons les hypothèses et notations précédentes. Ainsi r est une représentation projective de W_F , de type galoisien et de degré n . On notera F_1 la plus grande extension modérément ramifiée de F contenue dans le corps centrique K de r , et r_1 la restriction de r à W_{F_1} . Le groupe $G_1 = \text{Gal}(K/F_1)$ est le sous-groupe de ramification sauvage de $G = \text{Gal}(K/F)$.

Nous nous intéressons aux représentations r vérifiant:

- 1) $n > 1$;
- 2) r_1 est irréductible.

Ces hypothèses sont vérifiées si r est *primitive* non-triviale (voir [Ko], où l'on trouvera une description des représentations projectives primitives de W_F).

5.2 Comme r_1 est irréductible, sa restriction à P_F l'est aussi. On peut donc appliquer à r et r_1 le corollaire au théorème 4.3.

Soit R un relèvement de r ; on notera R_1 la restriction de R à W_{F_1} . Soit ρ un relèvement de r_1 . On a alors

$$e(K/F) a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$

et

$$e(K/F) a(\rho) = n(d(K/F_1) + a(\chi_\rho)).$$

Remarque. De ces deux formules avec $\rho = R_1$, on tire (car $\chi_R = \chi_{R_1}$) $e a(R) = n(e-1) + a(R_1)$, où $e = e(F_1/F)$.

Cette dernière égalité peut être généralisée, cf. [He, chap. 7].

De plus l'on a $a(\chi_\rho) > \beta(K/F_1) + 1$.

5.3 Appelons $b(r)$ (resp. $b(r_1)$) le minimum des $a(\chi_R)$ (resp. $a(\chi_\rho)$) quand R (resp. ρ) parcourt l'ensemble des relèvements de r (resp. r_1).

Supposons que l'on ait $b(r) = b(r_1)$. Prenons R tel que $a(\chi_R) = b(r)$. On a alors $a(R) = a(r)$ et $a(R_1) = a(r_1)$, puisque $\chi_{R_1} = \chi_R$. Par suite, on a l'égalité

$$e a(r) = n(e-1) + a(r_1).$$

Le théorème suivant généralise légèrement le théorème 1.7 de l'introduction:

THÉORÈME 5.3. *Soit r une représentation projective de W_F , de degré $n > 1$ et de type galoisien. Supposons que r_1 soit irréductible. Alors on a $b(r) = b(r_1)$ et $e a(r) = n(e-1) + a(r_1)$, où l'on a posé $e = e(F_1/F)$.*

5.4 *Démonstration.* Il suffit de prouver la première égalité. Mais d'après 5.2, on a $b(r_1) > \beta(K/F_1) + 1$. Le théorème 5.3 est alors une conséquence directe de la proposition suivante:

PROPOSITION 5.4. Soit r une représentation projective de type galoisien de W_F . Si l'on a $b(r_1) > \beta(K/F_1)$, alors on a $b(r) = b(r_1)$.

Comme en 4.2, on définit le caractère χ_r de K^N , noyau de la norme de K^\times à F^\times . De même, on définit le caractère χ_{r_1} de K^{N_1} , noyau de la norme de K^\times à F^\times . Alors $b(r)$ est le plus petit entier $m \geq 0$ tel que l'on puisse étendre χ_r en un caractère de K^\times trivial sur U_K^m . Par le lemme d'extension de [Bu, p. 14], c'est aussi le plus petit entier $m \geq 0$ tel que χ_r soit trivial sur $K^N \cap U_K^m$. On a un résultat analogue pour r_1 .

5.5 Il est clair que χ_{r_1} est la restriction de χ_r à K^{N_1} . Par conséquent, on a $b(r) \geq b(r_1)$. Remarquant que χ_r est trivial sur K^I , on voit que la proposition 5.4 découle, de façon évidente du lemme suivant:

LEMME 5.5. Soit m un entier strictement supérieur à $\beta(K/F_1)$. Alors on a

$$K^N \cap U_K^m = (K^{N_1} \cap U_K^m) \cdot (K^I \cap U_K^m).$$

Nous suivrons, pour démontrer ce lemme, l'argument de [Bu, p. 30]. Supposons $m > \beta(K/F_1)$, et prenons $x \in K^N \cap U_K^m$. Le lemme de [Bu, p. 30] nous dit que $H^{-1}(\text{Gal}(F_1/F), U_{F_1}^m)$ est nul. Il nous permet d'écrire

$$N_{K/F_1}(x) = \prod_{i=1}^v \bar{y}_i^{s_i-1}, \text{ où les } \bar{y}_i \text{ appartiennent à } U_{F_1}^{m'}, m' \text{ étant le}$$

plus petit entier supérieur ou égal à $\varphi_{K/F_1}(m)$, et où les $s_i, i = 1, \dots, v$, sont des éléments de G dont les images dans $\text{Gal}(F_1/F)$ engendrent ce groupe.

Comme on a $m > \beta(K/F_1)$, \bar{y}_i est la norme de K à F_1 d'un élément y_i de U_K^m [Se, chap. V, § 6]. On peut donc écrire:

$$x = x' \prod_{i=1}^v y_i^{s_i-1} \text{ avec } x' \in U_K^m \text{ et } N_{K/F_1}(x') = 1.$$

Par suite

$$x \in (U_K^m \cap K^{N_1}) \cdot (K^I \cap U_K^m)$$

et l'on a

$$K^N \cap U_K^m \subset (U_K^m \cap K^{N_1}) \cdot (K^I \cap U_K^m),$$

d'où l'égalité puisque l'inclusion dans l'autre sens est évidente. Ceci prouve le lemme 5.5 et donc le théorème 5.3.