

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS D'ADAMS ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES
Autor: Kratzer, Ch.
Kapitel: 4. Le théorème fondamental (Splitting principle)
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51063>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

4. LE THÉORÈME FONDAMENTAL (SPLITTING PRINCIPLE)

Définition 4.1 [1], [2]. Un pré- λ -anneau R est un λ -anneau (special λ -ring) si les λ -opérations vérifient les propriétés supplémentaires [1], trivialement vérifiées sur les sommes d'éléments de rang 1 :

- (i) $\lambda_t(1) = 1 + t$
- (ii) $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x); \lambda^1(y), \dots, \lambda^n(y))$
- (iii) $\lambda^m(\lambda^n(x)) = P_{mn}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{nm}(x))$

où P_n et P_{mn} sont des polynômes à coefficients entiers (donc définis par leur valeur sur les sommes d'éléments de rang 1). Le sous-ensemble de R vérifiant les formules (ii) et (iii) est fermé pour l'addition [1], [2]. Une forme faible (équivalente si R est sans torsion en tant que groupe abélien) de ces conditions s'exprime aisément en termes d'opérations d'Adams [1], [2]:

- (1) $\psi^k : R \rightarrow R$ est un endomorphisme d'anneau (et même de λ -anneau)
- (2) $\psi^k \circ \psi^l = \psi^l \circ \psi^k = \psi^{kl}$.

Nous désirons montrer que $R_A(G)$ est un λ -anneau. Si $P \in \mathcal{P}_G^A$, P est l'image d'un projecteur dans un AG -module V , A -libre de type fini

$$p^2 = p : V \rightarrow V \quad (\text{Im } p = P)$$

(par exemple $V = P \oplus Q$ où Q est un inverse projectif de P muni de la G -action triviale). En choisissant une A -base de V , $p \in M_n(A)$ et, si $\sigma : G \rightarrow GL_n(A)$ est de la forme matricielle de V , on a

$$V = \sigma^*(A_{id}^n).$$

De même, si $P' \in \mathcal{P}_A^G$, on peut écrire

$$P' = \text{im}(p' : V' \rightarrow V'), \quad p'^2 = p' \quad \text{et} \quad V' = \sigma'^*(A_{id}^m).$$

Rappelons que $R_A(M_n \times M_m)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{P}_A(M_n \times M_m)$ des $A(M_n \times M_m)$ -comodules A -projectifs de type fini où $A(M_n \times M_m) = A[X_{11}, \dots, X_{nn}; Y_{11}, \dots, Y_{mm}]$. Comme on l'a vu, $R_A(M_n \times M_m)$ est un pré- λ -anneau. Le fait crucial pour la suite est le

LEMME 4.2. (p, p') définissent un homomorphisme de pré- λ -anneaux

$$\alpha(p, p') : R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m) \rightarrow R_A(G)$$

tel que $[P], [P'] \in \alpha(p, p') R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$.

Preuve. Si E est un $\mathbf{Z}(M_n \times M_m)$ -comodule, on lui associe $e_A(E) = A \otimes_{\mathbf{Z}} E$ muni de l'action canonique de $M_n(A) \times M_m(A)$ définie sous 2.2. Ainsi le couple (p, p') de matrices agit comme un projecteur sur $e_A(E)$. Le A -module projectif image de ce projecteur $(p, p') \cdot e_A(E)$ est muni d'une action du groupe G car

$$\sigma(g) \cdot p = p \cdot \sigma(g) \quad \text{et} \quad \sigma'(g) \cdot p' = p' \cdot \sigma'(g')$$

par hypothèse. On pose alors

$$\alpha(p, p')(E) = (p, p') \cdot e_A(E).$$

Maintenant, si $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ est exacte dans $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$, alors

$$0 \rightarrow (p, p') \cdot e_A(E') \rightarrow (p, p') \cdot e_A(E) \rightarrow (p, p') \cdot e_A(E'') \rightarrow 0$$

est exacte dans \mathcal{P}_A^G (en tant que A -module, $e_A(E) = e_A(E') \oplus e_A(E'')$ et l'action de (p, p') sur $e_A(E') \oplus e_A(E'')$ est de la forme $\begin{pmatrix} p & p' \\ 0 & (p, p')^* \end{pmatrix}$). Enfin, par functorialité des puissances extérieures,

$$(p, p') \cdot \lambda^k(e_A(E)) = \lambda^k((p, p') \cdot e_A(E)).$$

Pour terminer, on remarque que $[P] = \alpha(p, p') [Z_{p_1}^n]$ et $[P'] = \alpha(p, p') [Z_{p_2}^m]$ où $Z_{p_1}^n$ (resp. $Z_{p_2}^m$) est le $\mathbf{Z}(M_n \times M_m)$ -comodule défini par

$$\begin{aligned} d_{Z_{p_1}^n} : \mathbf{Z}^n &\rightarrow \mathbf{Z}[X_{11}, \dots, X_{nn}; Y_{11}, \dots, Y_{mm}] \otimes \mathbf{Z}^n; e_i \mapsto \sum_{j=1}^n X_{ji} \otimes e_j \\ \text{(resp. } d_{Z_{p_2}^m} : \mathbf{Z}^m &\rightarrow \mathbf{Z}[X_{11}, \dots, X_{nn}; Y_{11}, \dots, Y_{mm}] \otimes \mathbf{Z}^m; \\ e_i &\mapsto \sum_{j=1}^m Y_{ji} \otimes e_j). \end{aligned} \quad \square$$

Si F est un corps, on peut, en vertu du lemme 3.3, identifier $R_F(M_n \times M_m)$ au sous-anneau de $R_F(GL_n \times GL_m)$ engendré par les représentations ne faisant intervenir ni $\det(X)^{-1}$, ni $\det(Y)^{-1}$. Par [9, lemme 5], les représentations polynomiales simples de $GL_n \times GL_m$ sur un corps sont classifiées par les poids dominants. Comme la condition de se prolonger à $M_n \times M_m$ (c'est-à-dire de ne faire intervenir ni $\det(X)^{-1}$, ni $\det(Y)^{-1}$) se lit sur

les poids, la démonstration de J.-P. Serre [9, théorème 5] passe au cas du monoïde $M_n \times M_m$ et livre que l'homomorphisme d'extension des scalaires :

$$i : R_Z(M_n \times M_m) \xrightarrow{\sim} R_Q(M_n \times M_m)$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 4.3. *Le pré- λ -anneau $R_Z(M_n \times M_m)$ est un λ -anneau.*

Preuve. Pour établir les formules (ii) et (iii) de la définition 4.1, on utilise un résultat de J.-P. Serre [9, théorème 4]:

si $R_A(T_n)$ désigne l'anneau des représentations polynomiales du tore T_n (matrices diagonales) d'algèbre de Hopf $A(T_n) = A[X_1, \dots, X_n]$, l'homomorphisme de restriction :

$$R_Q(GL_n \times GL_m) \xrightarrow{>} R_Q(T_{n+m})$$

est injectif. Donc la composition

$$R_Z(M_n \times M_m) \xrightarrow{\sim} R_Q(M_n \times M_m) \xrightarrow{>} R_Q(GL_n \times GL_m) \xrightarrow{>} R_Q(T_{n+m})$$

est injective. Or les représentations polynomiales du tore T_{n+m} sont sommes de représentation de rang 1. □

THÉORÈME 4.4. *Le pré- λ -anneau $R_A(G)$ est un λ -anneau.*

Preuve. Il suffit d'établir les formules (ii) et (iii) de la définition 4.1 pour des classes $[P]$ et $[Q]$ d'objets de \mathcal{P}_A^G (générateurs additifs de $R_A(G)$). Par le lemme 4.2, on se réduit à vérifier ces formules dans $R_Z(M_n \times M_m)$, ce qu'on a fait à la proposition 4.3. □

PROPOSITION 4.5. *Si A est un anneau de caractéristique $p > 0$, alors*

$$\psi^p = \text{Frob}_* : R_A(G) \rightarrow R_A(G)$$

Preuve. Comme au théorème 4.4, il suffit de montrer que

$$\psi^p = \text{Frob}_* : R_{F_p}(M_n) \rightarrow R_{F_p}(M_n).$$

Or, $R_{F_p}(M_n) \xrightarrow{>} R_{F_p}(GL_n)$ est injective, et l'égalité a déjà été établie sur $R_{F_p}(GL_n)$ au corollaire 3.7. □