2. Représentations polynomiales de GL_n

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Ainsi, la généralisation des modules libres aux modules projectifs se traduit par une structure supplémentaire: l'action de $K_0(A)$ sur l'idéal d'augmentation.

(2) Si V est une représentation de G sur A de forme matricielle $\rho : G \to GL_n(A)$, on peut considérer $\rho^* : R_A(GL_n(A)) \to R_A(G)$ et alors

$$[V] = \rho^* [A^n_{id}]$$

où $[A^n_{id}]$ est la classe de la représentation $id : GL_n(A) \to GL_n(A)$. De ce point de vue, les groupes $GL_n(A)$ jouent un rôle universel pour les représentations. Nous allons donc étudier maintenant un type particulier de représentations de $GL_n(A)$.

2. Représentations polynomiales de GL_n

Soit A un anneau commutatif avec unité. On considère le foncteur

$$GL_n : \mathscr{A}lg_A \to \mathscr{G}r \; ; \; A' \mapsto GL_n(A')$$

de la catégorie des A-algèbres commutatives avec unité dans celle des groupes. Une *représentation polynomiale* de GL_n sur l'anneau A est une transformation naturelle de foncteurs

$$\rho : GL_n \to GL_m$$

déterminée par une famille de polynômes $\rho_{ij}(X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ à coefficients dans A comme suit:

$$\rho_{A'} : GL_n(A') \to GL_m(A')$$

est définie par les fonctions polynomiales ρ_{ij} sur A'.

Exemple. La puissance extérieure $\lambda^2 : GL_2 \to GL_1$ est une représentation polynomiale sur $\mathbf{Z}$ définie par la fonction polynomiale

$$\rho(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}) = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} .$$

Comme $GL_n(A)$ est un groupe algébrique affine, son algèbre affine

$$A(GL_n) = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1}]$$

(algèbre des fonctions polynomiales sur GL_n) est une *algèbre de Hopf* (la multiplication $GL_n \times GL_n \to GL_n$ induit la comultiplication

$$A(GL_n) \to A(GL_n \times GL_n) = A(GL_n) \otimes A(GL_n)) .$$

Soit E un A-module. Une structure de $A(GL_n)$-comodule sur E est la donnée d'un homomorphisme A-linéaire

$$d_E : E \to A(GL_n) \otimes_A E$$

vérifiant les axiomes duaux d'une structure de module. Un *homomorphisme* de $A(GL_n)$-comodules $f : E \to E'$ est une application A-linéaire compatible avec d_E et $d_{E'}$. L'ensemble

$$\mathrm{Hom}^{A(GL_n)}(E, E')$$

des homomorphismes de $A(GL_n)$-comodules est donc un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_A(E, E')$ des applications A-linéaires. On montre alors que la catégorie des $A(GL_n)$-comodules est abélienne [9] (pour l'existence de noyaux, on utilise le fait que $A(GL_n)$ est un A-module plat, ce qui assure que si $E \subset E'$, alors $A(GL_n) \otimes E \subset A(GL_n) \otimes E'$).

LEMME 2.1. *La donnée d'une classe de conjugaison par des matrices de* $GL_m(A)$ *d'une représentation polynomiale* $\rho : GL_n \to GL_m$ *est équivalente à celle d'une classe d'isomorphisme de* $A(GL_n)$*-comodules* A*-libres de rang* m.

Preuve. La correspondance est donnée par la formule

$$d_E(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \rho_{ji}(X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1}) \otimes e_j$$

où $\{ e_1, \ldots, e_m \}$ est une A-base de A^m. □

Soit $\mathscr{P}_A(GL_n)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $A(GL_n)$-comodules formée des comodules qui sont *projectifs de type fini en tant que* A*-modules* (généralisation des représentations polynomiales de GL_n). On note alors $R_A(GL_n)$ le groupe de Grothendieck de $\mathscr{P}_A(GL_n)$ (quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme d'objets $\{E\}$ de $\mathscr{P}_A(GL_n)$ par les relations $\{E\} = \{E'\} + \{E''\}$ associées aux suites exactes $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$. Le produit tensoriel sur $A : (E, E') \mapsto E \otimes_A E'$ muni de la structure de comodule

$$E \otimes E' \xrightarrow{d_E \otimes d_{E'}} A(GL_n) \otimes A(GL_n) \otimes E \otimes E' \xrightarrow{m \otimes id} A(GL_n) \otimes E \otimes E'$$

(où m est la multiplication de l'algèbre de Hopf $A(GL_n)$ induite par la diagonale $\Delta : GL_n \to GL_n \times GL_n$) préserve les suites exactes de A-modules projectifs et induit une structure d'anneau commutatif avec unité sur $R_A(GL_n)$ (l'unité est la classe du $A(GL_n)$-comodule A défini par $d_A(1) = 1 \otimes 1$).

2.2. La donnée d'un $A(GL_n)$-comodule E fournit pour toute A-algèbre A' un $A'[GL_n(A')]$-module par:

$$A'[GL_n(A')] \otimes_A E \xrightarrow{id \otimes d_E} A'[GL_n(A')] \otimes_A A(GL_n) \otimes E \xrightarrow{év \otimes id} A' \otimes_A E$$

où $év : A'[GL_n(A')] \otimes_A A(GL_n) \to A'$ est l'homomorphisme d'évaluation. Par suite, on a des *homomorphismes d'anneaux canoniques*

$$e_{A'} : R_A(GL_n) \to R_{A'}(GL_n(A')) ; \; E \mapsto A' \otimes_A E .$$

Remarque. D'une manière générale, si H est une algèbre de Hopf qui est de plus un A-module plat, on notera $R_A(H)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{P}_A(H)$ des H-comodules qui sont projectifs de type fini en tant que A-modules. Comme pour $R_A(GL_n)$, on montre que $R_A(H)$ est un anneau commutatif avec unité. Nous utiliserons les algèbres de Hopf

$$A(M_n) = A[X_{11}, ..., X_{nn}], A(T_n)$$
$$= A[X_1, ..., X_n], A(M_n \times M_m) = A[X_{11}, ..., X_{nn}; Y_{11}, ..., Y_{mm}] ,$$

dont les groupes de Grothendieck $R_A(H)$ s'interprètent comme représentations polynomiales de M_n ($n \times n$ matrices), T_n (matrices diagonales) et $M_n \times M_m$ respectivement.

3. Le pré-λ-anneau $R_A(H)$

Définition 3.1 [1], [2]. *Un pré-λ-anneau (λ-ring) R est un anneau commutatif avec unité, muni d'une suite d'opérations $\{\lambda^n\}_{n \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$

(ii) $\lambda^k(x+y) = \sum_{i=0}^k \lambda^i(x) \cdot \lambda^{k-i}(y)$.

En introduisant les séries formelles $\lambda_t(x) = \sum_{i=0}^\infty \lambda^i(x) t^i$ et

$$\psi_{-t}(x) = -t \frac{d}{dt}(\log \lambda_t(x)) = -t \left(\frac{d}{dt} \lambda_t(x)\right)(\lambda_t(x))^{-1} ,$$

on définit une suite d'opérations $\psi^k : R \to R$, $k > 0$ *(opérations d'Adams)* par

$$\psi_{-t}(x) = \sum_{i=1}^\infty (-1)^i \psi^i(x) t^i .$$