1. L'Anneau $R_A(G)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

OPÉRATIONS D'ADAMS ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES

par Ch. Kratzer

Si A est un anneau commutatif, on connaît une certaine famille d'opérations ψ^k, k entier, agissant sur l'anneau $R_A(G)$ des représentations A-linéaires d'un groupe G quelconque, analogues aux opérations introduites par F. Adams en K-théorie topologique. Dans le cadre des représentations de groupes, ces opérations ont été introduites par R. Swan [10]; la technique (« splitting principle ») utilisée par ce dernier comme par d'autres [3], [8], est inspirée de la topologie et adaptée au cadre des représentations par le biais de la géométrie algébrique. Nous la présentons ici du point de vue universel en étudiant les représentations polynomiales de GL_n, ce qui permet d'établir en particulier un « splitting principle », de manière très directe à partir de [9]. L'apport de géométrique algébrique est alors la « connaissance » des représentations du groupe algébrique $GL_n(K)$ sur un corps K algébriquement clos.

On peut enfin remarquer que lorsque A est un corps et G un groupe fini, M. Kervaire [7] a obtenu des propriétés supplémentaires concernant les opérations ψ^k par des techniques élémentaires, notamment l'extension de corps et la restriction aux sous-groupes.

1. L'Anneau $R_A(G)$

Soient A un anneau commutatif avec unité et G un groupe quelconque (non nécessairement fini). On désigne par AG l'*algèbre du groupe* G, c'est-à-dire le A-module libre de base G, muni de la multiplication induite par celle de G. Une *représentation* de G sur A est une classe d'isomorphisme de AG-modules (à gauche), A-libres de type fini. Le choix d'une A-base de V permet d'associer à la classe d'isomorphisme $\{V\}$ un homomorphisme $\rho : G \to GL_n(A)$ unique à conjugaison près. On dit que ρ est la *forme matricielle* de la représentation. Il est utile de généraliser un peu le concept de représentation et de considérer la sous-catégorie pleine $\mathscr{P}_A^G$ de la catégorie abélienne des AG-modules formée des modules qui sont *projectifs de type fini en tant que A-modules*. On notera $R_A(G)$ le *groupe de Grothen-*

dieck de $\mathscr{P}_A^G$ défini comme le quotient du groupe abélien libre L sur les classes d'isomorphisme $\{V\}$ d'objets de $\mathscr{P}_A^G$ par les relations $\{V\} = \{V'\} + \{V''\}$ associées aux suites exactes $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$. On remarque que le produit tensoriel sur $A : (V, V') \to V \otimes_A V'$, muni de l'action diagonale du groupe G préserve les suites exactes de A-modules projectifs et induit par conséquent une structure d'*anneau commutatif avec unité* sur $R_A(G)$.

Si $\rho : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, ρ s'étend en un homomorphisme d'algèbre $\rho : AG \to AG'$, et tout AG'-module V devient un AG-module par $\lambda \cdot v = \rho(\lambda) \cdot v$. On en déduit un homomorphisme d'anneaux:

$$\rho^* : R_A(G') \to R_A(G)$$

dit de *restriction*. De même, si $f : A \to A'$ est un homomorphisme d'anneaux, tout AG-module V fournit un $A'G$-module $A' \otimes_A V$. On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux:

$$f_* : R_A(G) \to R_{A'}(G)$$

dit d'*extension des scalaires*. En d'autres termes, $R_A(G)$ est un foncteur contravariant en G et covariant en A.

On définit encore $IR_A(G)$ l'*idéal d'augmentation* de $R_A(G)$, comme le noyau de l'homomorphisme de restriction $R_A(G) \to R_A(1) = K_0(A)$ (scindé par l'homomorphisme de restriction $\varepsilon : R_A(1) \to R_A(G)$). $IR_A(G)$ est muni d'une structure de $K_0(A)$-*algèbre* via ε.

Remarques. (1) Si $R'_A(G)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{L}_A^G$ des AG-modules A-libres de type fini, l'inclusion de catégories $\mathscr{L}_A^G \hookrightarrow \mathscr{P}_A^G$ induit un monomorphisme sur les groupes de Grothendieck

$$i : R'_A(G) \to R_A(G)$$

(Comme les modules projectifs sont facteurs directs des modules libres, l'assertion suit du critère [6, lemma 1]:

$[M] = [N]$ dans $R_A(G)$ (resp. $R'_A(G)$) $\Leftrightarrow$ il existe $U, V, W \in \mathscr{P}_A^G$ (resp. $\mathscr{L}_A^G$) et deux suites exactes

$$0 \to U \to M \oplus W \to V \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to U \to N \oplus W \to V \to 0).$$

On vérifie ensuite aisément que i induit un isomorphisme sur les idéaux d'augmentation

$$i : IR'_A(G) \xrightarrow{\sim} IR_A(G).$$

Ainsi, la généralisation des modules libres aux modules projectifs se traduit par une structure supplémentaire: l'action de $K_0(A)$ sur l'idéal d'augmentation.

(2) Si V est une représentation de G sur A de forme matricielle $\rho : G \to GL_n(A)$, on peut considérer $\rho^* : R_A(GL_n(A)) \to R_A(G)$ et alors

$$[V] = \rho^* [A^n_{id}]$$

où $[A^n_{id}]$ est la classe de la représentation $id : GL_n(A) \to GL_n(A)$. De ce point de vue, les groupes $GL_n(A)$ jouent un rôle universel pour les représentations. Nous allons donc étudier maintenant un type particulier de représentations de $GL_n(A)$.

2. Représentations polynomiales de GL_n

Soit A un anneau commutatif avec unité. On considère le foncteur

$$GL_n : \mathscr{A}lg_A \to \mathscr{G}r \; ; \; A' \mapsto GL_n(A')$$

de la catégorie des A-algèbres commutatives avec unité dans celle des groupes. Une *représentation polynomiale* de GL_n sur l'anneau A est une transformation naturelle de foncteurs

$$\rho : GL_n \to GL_m$$

déterminée par une famille de polynômes $\rho_{ij}(X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ à coefficients dans A comme suit:

$$\rho_{A'} : GL_n(A') \to GL_m(A')$$

est définie par les fonctions polynomiales ρ_{ij} sur A'.

Exemple. La puissance extérieure $\lambda^2 : GL_2 \to GL_1$ est une représentation polynomiale sur $\mathbf{Z}$ définie par la fonction polynomiale

$$\rho(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}) = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} \,.$$

Comme $GL_n(A)$ est un groupe algébrique affine, son algèbre affine

$$A(GL_n) = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1}]$$

(algèbre des fonctions polynomiales sur GL_n) est une *algèbre de Hopf* (la multiplication $GL_n \times GL_n \to GL_n$ induit la comultiplication

$$A(GL_n) \to A(GL_n \times GL_n) = A(GL_n) \otimes A(GL_n)) \,.$$