

# 1. GÉNÉRALITÉS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 1. GÉNÉRALITÉS

### 1.1. Définitions

1) Un module *bilinéaire  $\varepsilon$ -symétrique* est un triple  $(M, \varphi, N)$  où  $M$  et  $N$  sont des  $R$ -modules et  $\varphi$  une application bilinéaire de  $M \times M$  dans  $N$  telle que  $\varphi(y, x) = \varepsilon \varphi(x, y)$ , quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $M$ . Si  $\varepsilon = +1$ ,  $\varphi$  est symétrique; sinon  $\varphi$  est antisymétrique.

2) Un module *alterné* est un triple  $(M, \varphi, N)$  où  $\varphi : M \times M \rightarrow N$  est bilinéaire et vérifie  $\varphi(x, x) = 0$  pour tout  $x$  de  $M$ .

3) Un module *quadratique* est un triple  $(M, q, N)$  où  $q$  est une application de  $M$  dans  $N$  vérifiant:

- (i)  $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$  pour tout couple  $(x, \lambda)$  de  $M \times R$ ;
- (ii)  $(x, y) \rightarrow q(x+y) - q(x) - q(y)$  est une application bilinéaire (symétrique) qu'on note  $\varphi_q$  de  $M \times M$  dans  $N$ .

### 1.2. Remarques

(1) Les objets  $(M, \varphi, N)$  (resp.  $(M, q, N)$ ) définis en 1.1 seront aussi notés  $(M, \varphi)$  ou  $\varphi$  (resp.  $(M, q)$  ou  $q$ ) suivant le contexte et appelés applications bilinéaires (resp. quadratiques). Si  $M$  et  $N$  sont fixés, les applications  $\varphi$  (ou  $q$ ) forment un  $R$ -module pour la somme des applications et la multiplication par un scalaire. Si  $N = R$ , ou plus généralement (suivant une idée de T. Kanzaki), si  $N$  est un  $R$ -module projectif de type fini et de rang 1, on parlera de formes bilinéaires ou de formes quadratiques.

2) Tout module alterné est antisymétrique. Inversement, si l'homothétie de rapport 2 dans  $N$  est inversible (ou si 2 est inversible dans  $R$ ), alternée et antisymétrique sont synonymes. Si l'homothétie de rapport 2 est inversible dans  $N$  (ou dans  $R$ ), il y a une bijection naturelle entre applications quadratiques et applications bilinéaires symétriques par  $q \rightarrow \varphi_q$  et  $\varphi \rightarrow q_\varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(x, x)$ .

Si par contre  $2 = 0$  dans  $N$  (ou dans  $R$ ),  $q$  quadratique implique  $\varphi_q$  alternée car  $\varphi_q(x, x) = 2q(x)$ . De plus  $\varphi$  alternée entraîne  $\varphi$  symétrique et  $\varphi$   $\varepsilon$ -symétrique ne dépend pas de  $\varepsilon$ .

### 1.3. Somme orthogonale

La somme orthogonale de deux objets  $(M, \varphi, N)$  et  $(M', \varphi', N')$  peut se définir même si  $N$  et  $N'$  sont distincts mais nous supposerons ici toujours  $N = N' : (M, \varphi, N) \perp (M', \varphi', N')$  c'est le module bilinéaire défini sur  $M \oplus M'$  et à valeurs dans  $N (= N')$  dont la forme  $\varphi \perp \varphi'$  est donnée par la formule:

$$\varphi \perp \varphi' ((x, x'), (y, y')) = \varphi(x, y) + \varphi'(x', y').$$

On définit de la même façon la somme orthogonale de deux modules quadratiques.

### 1.4 Morphismes

Les modules bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques, resp. alternés, resp. quadratiques) forment une catégorie. Nous noterons  $\text{Bil}_N$  la sous-catégorie formée des objets  $(M, \varphi, N)$ ,  $N$  fixé, où les morphismes sont les applications linéaires  $u : M \rightarrow M'$  telles que le triangle

$$\begin{array}{ccc} M \times M & & \\ \downarrow u \times u & \begin{array}{c} \nearrow \varphi \\ \searrow \varphi' \end{array} & N \\ M' \times M' & & \end{array} \quad \text{est commutatif.}$$

La somme orthogonale est alors un foncteur de  $\text{Bil}_N \times \text{Bil}_N$  dans  $\text{Bil}_N$ , associatif et commutatif à isomorphisme près. On définit de façon analogue les catégories  $\text{Sym}_N$ ,  $\text{ASym}_N$ ,  $\text{Alt}_N$ ,  $\text{Quad}_N \dots$  La définition de la somme orthogonale de deux modules quadratiques montre que

$$(1) \quad \varphi_{q \perp q'} \cong \varphi_q \perp \varphi_{q'}$$

ce qui s'écrit encore en disant que le carré suivant est commutatif à isomorphisme près:

$$\begin{array}{ccc} & \perp & \\ \text{Quad}_N \times \text{Quad}_N & \longrightarrow & \text{Quad}_N \\ \varphi \times \varphi \downarrow & \perp & \downarrow \varphi \\ \text{Bil}_N \times \text{Bil}_N & \longrightarrow & \text{Bil}_N \end{array}$$

### 1.5. Formes non dégénérées

Soit  $(M, \varphi, R)$  une forme bilinéaire. A  $\varphi$  sont associées deux applications linéaires de  $M$  dans son dual  $M^* = \text{Hom}(M, R)$ ,  $s_\varphi$  et  $d_\varphi$  définies par  $s_\varphi(x)(y) = \varphi(x, y)$  et  $d_\varphi(x)(y) = \varphi(y, x)$ . Comme  $\varphi$  est  $\varepsilon$ -symétrique,  $d_\varphi = \varepsilon s_\varphi$ . On dira que  $\varphi$  (où  $(M, \varphi)$ ) est non dégénérée si  $d_\varphi$ , et donc  $s_\varphi$ , est un isomorphisme de  $R$ -modules. Cela implique, en transposant  $d_\varphi$ , que  $M$  est *réflexif*. Dans le cas d'une forme quadratique, on dira que  $q$  est non dégénérée si la forme bilinéaire symétrique associée  $\varphi_q$  l'est.

Une généralisation peut se faire aux cas d'applications bilinéaires (ou quadratiques), le cas le plus intéressant étant celui où  $N$  est projectif de type fini et de rang 1 (on notera que dans ce cas un  $R$ -module projectif de type fini  $M$  est *N-réflexif* en ce sens que l'application naturelle  $C_{M, N} : M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, N), N)$  est un isomorphisme de modules). On dira donc, dans ce cas, que  $(M, \varphi, N)$  est non dégénéré si  $s_\varphi : M \rightarrow \text{Hom}(M, N)$  est un isomorphisme de  $R$ -modules, et de même dans le cas quadratique. Ainsi par exemple si  $P$  est projectif de type fini et de rang 2, le triple  $(P, \Lambda, \Lambda^2 P)$  où  $\Lambda(x, y) = x_\Lambda y$  est un module alterné non dégénéré.

Notons les propriétés suivantes: la somme orthogonale de deux formes non dégénérées est non dégénérée; un lemme classique ([1]) dit que si  $u : (M, \varphi, N) \rightarrow (M', \varphi', N)$  est un morphisme de formes bilinéaires et si  $\varphi$  est non dégénérée,  $u$  identifie  $M$  à un facteur direct de  $M'$  et il existe un sous-module  $M''$  de  $M'$  tel qu'en désignant par  $\varphi''$  la restriction de  $\varphi'$  à  $M''$ , on ait un isomorphisme:

$$(M', \varphi') \cong (M, \varphi) \perp (M'', \varphi'').$$

### 1.6. Extension des scalaires

Soit  $R \rightarrow S$  un homomorphisme d'anneaux et  $(M, \varphi, N)$  (resp.  $(M, q, N)$ ) un module bilinéaire (resp. quadratique). Il existe sur le couple de  $S$ -modules  $(M \otimes_R S, N \otimes_R S)$  une application bilinéaire  $\varphi_S$  (resp. quadratique  $q_S$ ) unique telle que  $\varphi_S(x \otimes s, y \otimes s') = \varphi(x, y) \otimes ss'$  (resp.  $q_S(x \otimes s) = q(x) \otimes s^2$ ). Dans le cas quadratique, on a  $\varphi_{q_S} \cong (\varphi_q)_S$ . L'extension des scalaires ainsi définie commute à la somme orthogonale.

Si le module bilinéaire  $\varphi$  (ou  $q$ ) est non dégénéré, il en est de même de  $\varphi_S$  (ou  $q_S$ ) quelle que soit  $R \rightarrow S$ . En sens inverse, si  $M$  est projectif de type fini, la forme  $\varphi$  (ou  $q$ ) est non dégénérée si et seulement si toutes ses localisées (extension aux anneaux  $R_{\underline{m}}$ ,  $\underline{m}$  maximal, ou  $R_{\underline{p}}$ ,  $\underline{p}$  premier) sont non dégénérées.

### 1.7. Espaces hyperboliques

Soient  $M$  et  $N$  deux modules et  $h(M, N) = M \oplus \text{Hom}(M, N)$ : ce dernier possède une structure bilinéaire naturelle,  $\varepsilon$ -symétrique ou quadratique obtenue en posant

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi((x, f), (y, g)) = f(y) + \varepsilon g(x) \\ q(x, f) = f(x) \end{cases}$$

où  $x, y \in M, f, g \in \text{Hom}(M, N)$ . On a  $\varphi_q = {}_1\varphi$  et  ${}_{-1}\varphi$  est alternée.

Ce module bilinéaire (ou quadratique) s'appelle l'espace hyperbolique du couple  $(M, N)$ , ou de  $M$ , si  $N$  est fixé. On a l'isomorphisme canonique suivant:  $h(M \oplus M', N) \cong h(M, N) \perp h(M', N)$ . Si  $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$  est un isomorphisme de modules,  $h(\alpha): h(M_1, N) \rightarrow h(M_2, N)$  donné par

la matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & t_\alpha - 1 \end{pmatrix}$  est un isomorphisme de modules bilinéaires. Ainsi

$h(\cdot, N)$  est un foncteur covariant de la catégorie des  $R$ -modules, avec pour morphismes les isomorphismes, dans la catégorie  $\text{Bil}_N$  (ou  $\text{Quad}_N$ ), qui commute à la somme, directe pour les  $R$ -modules, orthogonale pour les modules bilinéaires ou quadratiques.

La non dégénérescence de  $h(M, N)$  est liée à la réflexivité de  $M$ ; soit  $C_{M, N}: M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, N), N)$  l'application canonique qui à  $m$  associe  $f \rightarrow \hat{m}(f) = f(m)$ . La matrice de  $s_\varphi: M \oplus \text{Hom}(M, N) \rightarrow$

$\text{Hom}(M, N) \oplus \text{Hom}(\text{Hom}(M, N), N)$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1_{\text{Hom}(M, N)} \\ \varepsilon C_{M, N} & 0 \end{pmatrix}$

si bien que  $h(M, N)$  est non dégénéré si et seulement si  $M$  est  $N$ -réflexif, c'est-à-dire si  $C_{M, N}$  est un isomorphisme. Si on suppose que  $M \in \mathcal{P}(R)$  et que  $N$  est projectif de type fini et de rang 1, alors  $h(M, N)$  est non dégénéré.

### 1.8. Espaces métaboliques

Rappelons que dans un module bilinéaire  $(M, \varphi, N)$ , deux éléments  $x$  et  $y$  de  $M$  sont dits *orthogonaux* si  $\varphi(x, y) = 0$ . Si  $M_1$  est un sous-module  $M$ , les éléments de  $M$  orthogonaux à tous les éléments de  $M_1$  forment un sous-module noté  $M_1^\perp$ , l'*orthogonal* de  $M_1$ . Le sous-module  $M_1$  de  $M$  est dit *totalelement isotrope* s'il est contenu dans son orthogonal (dans le cas d'un module quadratique, on rajoute la condition  $q(x) = 0$  quel que soit  $x$  dans  $M_1$ ).

*Définition.* Un module bilinéaire  $(M, \varphi, N)$  non dégénéré où  $N$  est projectif de type fini et de rang 1 est *métabolique* s'il existe un sous-module  $M_1$  de  $M$  totalement isotrope et égal à son orthogonal.

Dans le cas quadratique, on définira de même un module métabolique. Un module hyperbolique  $h(M, N)$  est métabolique s'il est non dégénéré: il suffit de prendre pour  $M_1$ ,  $M$  ou bien  $\text{Hom}(M, N)$ . Dans le cas des modules quadratiques, on a la réciproque bien connue: modules quadratiques métaboliques et hyperboliques coïncident.

Dans le cas bilinéaire, symétrique par exemple, soit  $R^2$  muni de la forme bilinéaire  $\varphi((x, y), (x', y')) = xy' + x'y + yy'$ . C'est un module métabolique avec  $M_1 = R(1, 0) = \text{Re}_1$  et soit  $e_2 = (0, 1)$ . Pour que  $(R^2, \varphi)$  soit hyperbolique, il est nécessaire et suffisant qu'il existe  $z = xe_1 + ye_2$  tel que  $\varphi(z, z) = 0$  et tel que  $(e_1, z)$  soit une base de  $R^2$ , c'est-à-dire  $y \in U(R)$  ou encore  $y = 1$ . Or,  $\varphi(xe_1 + e_2, xe_1 + e_2) = 1 + 2x$  ne peut être nul que si 2 est inversible dans  $R$ . Le module  $(R^2, \varphi)$  est donc hyperbolique si et seulement si  $2 \in U(R)$ . De façon générale, si 2 est inversible dans  $R$ , les notions de modules métaboliques et de modules hyperboliques sont les mêmes.

Sans faire d'hypothèse sur 2, considérons un module métabolique  $(M, \varphi, N)$  et soit  $P$  un sous-module de  $M$  tel que  $P^\perp = P$ . Alors en tant que  $R$ -module,  $M$  s'identifie à  $P \oplus \text{Hom}(P, N)$  et l'application linéaire associée à  $\varphi$  de  $P \oplus \text{Hom}(P, N)$  dans  $\text{Hom}(P, N) \oplus \text{Hom}(\text{Hom}(P, N), N)$  a une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 1_{\text{Hom}(P, N)} \\ \varepsilon C_{P, N} & \alpha \end{pmatrix}$  où  $C_{P, N}$  est l'application canonique de  $P$  dans le  $N$ -bidual de  $P$ . On voit alors que  $M$  est hyperbolique si et seulement si il existe un supplémentaire  $P'$  de  $P$  isomorphe à  $\text{Hom}(P, N)$  tel que l'application  $\alpha'$  obtenue comme  $\alpha$  est l'application nulle. Or, un calcul facile montre que la forme  $(x, y) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \alpha(x)(y)$  est  $\varepsilon$ -symétrique et que  $\bar{\alpha}'$  et  $\bar{\alpha}$  diffère par une forme  $T(\beta) = \beta + \varepsilon \tilde{\beta}$  où  $\tilde{\beta}(x, y) = \beta(y, x)$ , de sorte que  $M$  est métabolique si et seulement si  $\bar{\alpha}$  est de la forme  $T(\beta)$ . Il est alors facile de voir que c'est toujours le cas si 2 est inversible dans  $R$ .

### 1.9. Groupes universels

En nous restreignant à des sous-catégories pleines convenables de modules bilinéaires (ou quadratiques), nous allons définir divers groupes universels. Soit  $N \in \underline{\text{Pic}}(R)$ ; on appelle Symbil  $(N)$  (resp. As  $(N)$ , Alt  $(N)$ ,

Quad ( $N$ )) la sous-catégorie formée des modules bilinéaires symétriques ( $M, \varphi, N$ ) (resp. antisymétriques, alternés, quadratiques) non dégénérés dont le module sous-jacent  $M$  est projectif de type fini. Le formalisme de la  $K$ -théorie algébrique ([1], Ch. 1) est adapté à ces situations. Ainsi à l'aide de la somme orthogonale on obtient des groupes abéliens qu'on note  $K_0^{\text{Symbil}}(N)$ ,  $K_0^{\text{As}}(N)$ ,  $K_0^{\text{Alt}}(N)$ ,  $K_0^Q(N)$ : ce sont les groupes universels (ou de Groethendieck) pour les applications  $f$  de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de la catégorie correspondante dans les groupes abéliens  $G$  tels que  $f(M \perp M') = f(M) + f(M')$  dans  $G$ .

Soit alors  $K_0(R)$  le groupe de Groethendieck de la catégorie  $\underline{P}(R)$  des  $R$ -modules projectifs de type fini et notons  $[M]$  la classe dans ce groupe du module  $M$ . L'application  $f$  qui au module bilinéaire  $M$  associe  $[M]$  (foncteur oubli) induit d'après le caractère universel des groupes définis ci-dessus des homomorphismes de groupes abéliens  $K_0(F) : K_0(N) \rightarrow K_0(R)$  (le point  $\cdot$  remplaçant Symbil, As, Alt ou  $Q$ ). Inversement, l'isomorphisme naturel  $h(P_1, N) \perp h(P_2, N) \cong h(P_1 \oplus P_2, N)$  pour  $P_1$  et  $P_2$  dans  $\underline{P}(R)$  induit des homomorphismes  $K_0(H) : K_0(R) \rightarrow K_0(N)$ . Dans le cas quadratique, on appelle groupe de Witt *des types de formes quadratiques* de  $N$ , le conoyau de  $K_0^Q(H)$ .

Dans les autres cas, on peut définir deux groupes de Witt selon que l'on considère comme triviaux les modules hyperboliques ou plus généralement les modules métaboliques. Mais, en fait, les deux groupes obtenus sont canoniquement isomorphes.

Ces groupes de Groethendieck et de Witt commutent à l'extension des scalaires du fait de la propriété analogue de la somme orthogonale. Il en est de même pour les homomorphismes  $K_0(F)$  et  $K_0(H)$ .

Fixons la notation suivante: si  $(M, \varphi, N)$  (resp.  $(M, q, N)$ ) est un module bilinéaire (resp. quadratique), on notera  $[(M, \varphi)]$  ou  $[\varphi]$  (resp.  $[(M, q)]$  ou  $[q]$ ) son image dans  $K_0(N)$ . On abrègera  $K_0^{\text{Symbil}}$  en  $K_0^{SB}$ .

## 2. STRUCTURES MULTIPLICATIVES

Le groupe de Groethendieck  $K_0(R)$  est muni d'une structure d'anneau (commutatif et unitaire) par le produit tensoriel. Nous allons voir que pour les modules bilinéaires et quadratiques nous avons une situation analogue qui enrichit les groupes  $K_0(N)$  de structures supplémentaires.