

# 7. Volume

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PROPOSITION 5.1 (bis). *The following statement is equivalent to those listed above.*

(d) *The local fundamental group of  $V$  is finite.*

It is shown in [Prill, p. 381; Brieskorn 2, p. 344] that conditions (a) and (d) are equivalent.

*Characterization A6.* The local fundamental group of  $f^{-1}(0)$  is finite. Thus Characterizations A5 and A6 are equivalent.

There is an algorithm for computing the local fundamental group of  $V$  from a resolution [Mumford], and singularities  $V$  with finite, nilpotent and solvable local fundamental group have been classified [Brieskorn 2; Wagreich 2]. When  $V$  is a complete intersection, this classification is particularly simple [Durfee 2, Proposition 3.3].

## 7. VOLUME

Let  $f(x, y, z)$  be the germ at the origin  $\mathbf{0}$  of a complex analytic function, and suppose that  $f(\mathbf{0}) = 0$  and that the origin is an isolated critical point of  $f$ . There is an  $\varepsilon > 0$  such that  $f^{-1}(0)$  intersects all spheres of radius  $\varepsilon'$  about  $\mathbf{0}$  transversally for  $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ . (See Section 12.) For  $t \in \mathbf{C}$ , let

$$V_t = f^{-1}(t) \cap D_\varepsilon^6$$

where  $D_\varepsilon^6$  is the closed disk of radius  $\varepsilon$  about  $\mathbf{0}$ . The function  $f(x, y, z)$  takes the constant value  $t$  on  $V_t$ , so  $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \equiv 0$  there. Hence a nowhere-vanishing holomorphic two-form  $\omega_t$  on  $V_t$  may be defined by the equivalent expressions

$$\omega_t = \frac{dy \wedge dz}{\partial f / \partial x} = \frac{dz \wedge dx}{\partial f / \partial y} = \frac{dx \wedge dy}{\partial f / \partial z},$$

*Characterization A7.* The integral  $\int_{V_0} \omega_0 \wedge \bar{\omega}_0$  is finite.

Note that the form  $\omega_0 \wedge \bar{\omega}_0$  takes positive real values. The equivalence of Characterizations A2 and A7 is due to Laufer, and follows easily from his expression for the geometric genus in terms of forms [Laufer 2, Corollary 3.6].

A different formulation of this characterization is due to E. Looijenga (unpublished): Let  $\Delta(r) = \{t \in \mathbf{C} : |t| < r\}$ , let

$$X(r) = f^{-1}(\Delta(r)) \cap D_\varepsilon^6$$

and let  $\text{vol}(X(r))$  be its volume in  $\mathbf{C}^3$ .

*Characterization A7'.*  $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-2} \text{vol}(X(r))$  is finite.

Let  $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ , and note that  $\omega \wedge \bar{\omega}$  is  $8/i$  times the volume form of  $\mathbb{C}^3$ . Characterizations A7 and A7' are equivalent since

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \text{vol}(X(r)) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{i}{8r^2} \int_{X_r} \omega \wedge \bar{\omega} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{i}{8r^2} \int_{\Delta(r)} \left( \int_{V_t} \omega_t \wedge \bar{\omega}_t \right) dt \wedge \bar{dt}, \end{aligned}$$

but since

$$\int_{\Delta(r)} \left( \frac{i}{2} \right) dt \wedge \bar{dt} = \text{vol}(\Delta(r)) = 2\pi r^2,$$

the above limit equals

$$\frac{\pi}{2} \int_{V_0} \omega_0 \wedge \bar{\omega}_0.$$

## B. NINE CHARACTERIZATIONS OF SIMPLE CRITICAL POINTS

We switch our attention from the analytic set defined by the zero locus of an analytic function  $f(x, y, z)$  to the function itself and the nature of its critical point. We also generalize to functions  $f(z_0, \dots, z_n)$  of an arbitrary number of variables. The characterizations in the following theorem will start in Section 9.

**THEOREM B.** *Let  $f(z_0, \dots, z_n)$  with  $n \geq 1$  be the germ at the origin  $\mathbf{0}$  of a complex analytic function, and suppose further that  $f(\mathbf{0}) = 0$  and that  $\mathbf{0}$  is an isolated critical point of  $f$ . Then Characterizations B1 through B9 are equivalent.*

## 8. THE CLASSIFICATION OF RIGHT EQUIVALENCE CLASSES

Let  $\mathcal{O}$  be the set of germs  $f$  at the origin  $\mathbf{0}$  of complex analytic functions on  $\mathbb{C}^{n+1}$ . (In other words,  $\mathcal{O}$  is just the ring  $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  of convergent power series.) The ring  $\mathcal{O}$  is local with maximal ideal

$$\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O} : f(\mathbf{0}) = 0\}.$$