2. Harmonische räume und fellersche halbgruppen

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

mit dem positiven Faktor

$$c_n = \frac{1}{4\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

Der sich durch Integration der Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ ergebende Kern

$$V = \int_0^\infty P_t \, dt \tag{8}$$

ist somit nichts anderes als der durch Faltung mit Hilfe des Maßes

$$\kappa = c_n N \lambda^n \tag{9}$$

wirkende Kern $Vf = \kappa * f$.

Damit sind es die drei Objekte Δ, N und $(P_t)_{t>0}$, die im Mittelpunkt der klassischen Potentialtheorie stehen. Jedes dieser Objekte erlaubt die Definition der (global definierten) hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$. Aus der Kenntnis eines dieser Objekte folgt die der anderen, denn N ist die Fundamentallösung von (1), interpretiert als der zu κ gehörige Faltungskern V, berechnet sich N gemäß (8) aus $(P_t)_{t>0}$, ferner ist Δ der infinitesimale Erzeuger von $(P_t)_{t>0}$, d.h. es gilt

$$\Delta f = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t} \tag{10}$$

für alle Funktionen $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ mit kompakten Träger. Hierzu vergleiche man Berg-Forst [7].

Der Satz 1.1 ist der Schlüssel zum wahrscheinlichkeitstheoretischen Verständnis potentialtheoretischer Begriffsbildungen. Hierauf soll aber hier nicht eingegangen werden. (Vgl. jedoch [2].)

2. Harmonische Räume und Fellersche Halbgruppen

Die weiteren Teile des Vortrages werden vor allem durch die Frage nach dem Zusammenhang zwischen lokaler Potentialtheorie und Halbgruppen von Kernen motiviert.

Als lokale Potentialtheorie verstehen wir dabei die Theorie der harmonischen Räume, die sich aus der Idee entwickelt hat, die Theorie der Laplace-Gleichung (1) auf allgemeinere elliptische und parabolische Differentialgleichungen etwa mit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Grundraum zu entwickeln. (Vgl. hierzu [1], Brelot [10], [11], [12] und Constantinescu-Cornea [13].)

Der Einfachheit halber sollen hier harmonische Räume nur im Sinne von BRELOT [10] verstanden werden. Es sei demnach X ein lokal-kompakter, (Hausdorff-) Raum und $\mathcal{H}$ ein Garbendatum von Vektorräumen stetiger reeller Funktionen. $(X,\mathcal{H})$ heißt dann ein *Brelot-Raum*, wenn X keine isolierten Punkte besitzt und lokal-zusammenhängend ist, eine Basis regulärer Mengen existiert (per definitionem ist für diese das Dirichletsche Problem für alle stetigen Randwerte eindeutig und „positiv" lösbar) und das Brelotsche Konvergenzaxiom erfüllt ist. Wir werden nur *strenge* oder $\mathfrak{P}$-Brelot-Räume betrachten, also solche mit mindestens einem Potential $p \neq 0$. Die Definition dieser Begriffsbildungen findet man in [10], [11] und [1]. Für $n \geqslant 3$ liefert das Garbendatum $\mathcal{H}_\Delta$ der Lösungen von (1), also der klassischen harmonischen Lösungen, den strengen Brelot-Raum $(\mathbf{R}^n, \mathcal{H}_\Delta)$.

Ausgelöst durch die Untersuchung Markovscher Prozesse haben sich in zunehmendem Maße spezielle Halbgruppen von Kernen als wichtig erwiesen. Auf einem lokal-kompakten Raum X mit abzählbarer Basis sei $(P_t)_{t>0}$ eine Halbgruppe von *Kernen*. Jedes P_t ist also eine Funktion auf $X \times \mathfrak{B}_X$, wobei $\mathfrak{B}_X$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen bezeichnet; für jedes $A_0 \in \mathfrak{B}_X$ bzw. $x_0 \in X$ werden dabei die Abbildungen $A \mapsto P_t(x_0, A)$ bzw. $x \mapsto P_t(x, A_0)$ als nicht-negative Maße auf $\mathfrak{B}_X$ bzw. als (nicht-negative) Borel-meßbare Funktionen vorausgesetzt. Durch Integration nach der zweiten Variablen wirkt jedes P_t als linearer Operator auf geeigneten Räumen meßbarer Funktionen:

$$P_t f(x) = \int P_t(x, dy) f(y) \tag{11}$$

(z.B. für Borel-meßbares $f \geqslant 0$). Die Halbgruppeneigenschaft besagt nichts anderes als

$$P_{s+t} f = P_s P_t f \tag{12}$$

für alle Borel-meßbaren Funktionen $f \geqslant 0$ und für alle $s, t > 0$ oder — äquivalent hierzu —

$$P_{s+t}(x, A) = \int P_s(x, dy) P_t(y, A) \tag{13}$$

für alle $x \in X$ und $A \in \mathfrak{B}_X$. Es müssen also die sogenannten Chapman-Kolmogorov-Gleichungen erfüllt sein.[1])

Eine solche Halbgruppe von Kernen heißt *Fellersch*, wenn jeder Kern P_t sub-Markovsch, also $P_t 1 \leqslant 1$ erfüllt ist, wenn P_t den Raum $C_0(X)$ der im Unendlichen verschwindenden, stetigen, reellen Funktionen auf X in sich abbildet, und wenn außerdem

[1]) Vgl. hierzu [3] und MEYER [24].

$$\lim_{t \to 0} P_t f = f \qquad \textit{für alle } f \in C_0(X)$$

im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz erfüllt ist. Einer solchen Fellerschen Halbgruppe sind wir in der klassischen Theorie bereits begegnet: die Brownsche Halbgruppe ist Fellersch. Jeder der Kerne P_t ist dort sogar Markovsch, erfüllt also $P_t 1 = 1$.

Eines der Leitmotive für die Entwicklung der Theorie der harmonischen Räume war, über Jahre hinweg, die Frage nach der Existenz einer Halbgruppe von Kernen auf einem streng harmonischen Raum $(X, \mathscr{H})$ derart, daß, wie in der klassischen Theorie, die exzessiven Funktionen mit den hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$ auf X übereinstimmen. Hyperharmonisch heissen dabei die durch die Mittelwerteigenschaft (für reguläre Mengen) definierten nach unten halbstetigen Funktionen. Die Antwort auf diese Frage ist Ja. Sie wurde durch MEYER [23] für Brelotsche und später durch BOBOC-CONSTANTINESCU-CORNEA [9] und HANSEN [18], [19] für allgemeinere Typen harmonischer Räume gegeben:

2.1. *Auf einem streng harmonischen Raum* $(X, \mathscr{H})$ *existieren stets ein strikt positives, stetiges, reelles Potential* q *und eine Fellersche Halbgruppe* $(Q_t)_{t>0}$ *derart, dass deren exzessive Funktionen mit den mit* $\frac{1}{q}$ *multiplizierten nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen übereinstimmen.*

Ist die konstante Funktion 1 *hyperharmonisch, so fallen die nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen mit den exzessiven Funktionen der neuen Halbgruppe*

$$(14) \qquad P_t f = q\, Q_t\left(\frac{1}{q} f\right) \qquad (f \in C_0(X))$$

zusammen.

Man nennt die Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ auf Grund ihrer Herkunft auch *quasi-Fellersch.*

3. DER SATZ VON G. FORST

Im Gegensatz zu der dem Resultat 2.1 zugrunde liegenden Fragestellung ist die umgekehrte Frage nach Eigenschaften einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen auf einem Raum X, welche die Existenz eines Garbendatums $\mathscr{H}$ garantieren, so daß $(X, \mathscr{H})$ ein harmonischer Raum und die exzessiven Funktionen von $(P_t)_{t>0}$ mit den hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$ zusammenfallen, neueren Datums. Es sind nur Teilantworten bekannt.