4. La formule de R. H. Fox

Considérons K et S^3 comme orientés. Alors, via des conventions fixées une fois pour toutes, on obtient un générateur t du groupe de Galois du revêtement $X_\infty \to X$.

Les « groupes » d'homologie $H_1(X_\infty, R)$, $H_1(\hat{X}_m, R)$ et $H_1(X_m, R)$ sont alors munis d'une structure de RT-modules, t agissant via Galois.

Les faits suivants sont bien connus. Pour une démonstration, voir [4].

(i) $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}T$-module de type fini. (C'est essentiellement une conséquence du fait que $\mathbf{Z}T$ est nœthérien.)

(ii) $H_1(\hat{X}_m; R) \approx \text{Coker}\ \{1 - t^m : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty, R)\}$.
(C'est une conséquence de la « suite exacte de Milnor »).
Si l'on fait $m = 1$ dans la dernière égalité et si l'on utilise le fait que RT est nœthérien, on obtient que $1 - t : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty; R)$ est un isomorphisme pour tout R nœthérien.

(iii) $H_1(X_\infty, \mathbf{Q})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}$.
(Conséquence facile du dernier argument par $R = \mathbf{Q}$.)
Le résultat suivant est dû à R. H. Crowell [1].

(iv) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module admettant une présentation carrée (c'est-à-dire: nombre de générateurs égal au nombre de relations). Soit $\Delta \in \mathbf{Z}T$ le déterminant de cette présentation. (Δ est le générateur du premier idéal élémentaire de A.) Alors A est sans $\mathbf{Z}$-torsion si et seulement si Δ est « primitif » (c'est-à-dire si ses coefficients sont premiers entre eux).
Il est classique que $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ satisfait les hypothèses du théorème de Crowell.
Le dernier fait dont nous aurons besoin est dû à M. Kervaire [5]:

(v) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini et tel que la multiplication par $(1-t)$ soit un isomorphisme, alors le sous-groupe de $\mathbf{Z}$-torsion de A est fini.

4. La formule de R. H. Fox

Conformément à nos conventions du paragraphe précédent, désignons par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur nœud de polynôme d'Alexander Δ. *La formule de Fox* s'énonce ainsi:

$H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est fini si et seulement si Rés $(1-t^m, \Delta) \neq 0$. En ce cas l'ordre du groupe $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est égal à $|\text{Rés}\,(1-t^m, \Delta)|$.

L'essentiel du paragraphe sera consacré à la démonstration de cette formule.

Pour abréger, désignons par A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini, sans $\mathbf{Z}$-torsion, et de rang fini sur $\mathbf{Q}$. Nous commençons par appliquer à A un argument dû à D. W. Sumners [8]. Comme A est sans $\mathbf{Z}$-torsion, on a une injection naturelle:

$$A \subset\!\!\rightarrow A \otimes \mathbf{Q}\,.$$

$A \otimes \mathbf{Q}$ est un $\mathbf{Q}T$-module. Comme $\mathbf{Q}T$ est principal, on peut choisir un isomorphisme (de $\mathbf{Q}T$-modules):

$$A \otimes \mathbf{Q} \underset{\varphi}{\rightarrow} \oplus \mathbf{Q}T \Big/ (\lambda_i)\,.$$

Comme A est de rang fini sur $\mathbf{Q}$, les polynômes λ_i sont différents de zéro. Sans restreindre la généralité, on peut les choisir à coefficients entiers, primitifs et satisfaisant la condition (*) du § 2.

Par Crowell, $\mathbf{Z}T \Big/ (\lambda_i)$ est sans $\mathbf{Z}$-torsion et l'on a donc une injection de $\mathbf{Z}T$-modules:

$$\oplus\, \mathbf{Z}T \Big/ (\lambda_i) \subset\!\!\rightarrow \mathbf{Q}T \Big/ (\lambda_i) \rightarrow A \otimes \mathbf{Q}\,.$$

Dans $A \otimes \mathbf{Q}$ se trouvent ainsi deux $\mathbf{Z}T$-modules de type fini, qui engendrent $A \otimes \mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$. Il s'agit de A et de $B = \underset{i}{\oplus}\, \mathbf{Z}T \Big/ (\lambda_i)$.

Affirmation 1: Dans ces conditions, il existe un entier $b \neq 0$ tel que $b\,.\,B \subset A$. (Preuve évidente utilisant des systèmes finis de générateurs pour A et pour B.)

On obtient alors une suite exacte de $\mathbf{Z}T$-modules:

$$0 \rightarrow B \overset{.b}{\rightarrow} A \rightarrow A \Big/ b\,.\,B \rightarrow 0$$

Affirmation 2: Le quotient $A \Big/ b\,.\,B$ est un groupe abélien de torsion, d'exposant fini.

En effet, en inversant le rôle de A et B dans l'affirmation 1, il existe un entier $a \neq 0$ tel que $a\,.\,A \subset B$. Il est clair que $a\,.\,b$ annule $A \Big/ b\,.\,B$.

Avertissement : Si λ et μ sont deux éléments non nuls de $\mathbf{Z}T$, sans facteurs communs, on a

$$\mathbf{Q}T\Big/_{(\lambda)} \oplus \mathbf{Q}T\Big/_{(\mu)} \approx \mathbf{Q}T\Big/_{(\lambda\mu)}.$$

Comme $\mathbf{Z}T$ n'est pas principal, on n'a en général pas

$$\mathbf{Z}T\Big/_{(\lambda)} \oplus \mathbf{Z}T\Big/_{(\mu)} \approx \mathbf{Z}T\Big/_{(\lambda\mu)}.$$

Ceci indique que le choix d'une décomposition de $A \otimes \mathbf{Q}$ en somme de modules cycliques n'est pas innocent. Nous reviendrons sur ce point au § 5.

PROPOSITION. Soit A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini, sans $\mathbf{Z}$-torsion et de rang fini sur $\mathbf{Q}$. Supposons qu'on a une injection $B = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Z}T\Big/_{(\lambda_i)} \hookrightarrow A$ telle que $A\Big/_{B}$ soit un groupe fini. Alors $A\Big/_{(1-t^m)A}$ est fini si et seulement si $\mathrm{Rés}(1-t^m, \prod_{i=1}^{r} \lambda_i) \neq 0$ et dans ce cas l'ordre de $A\Big/_{(1-t^m)A}$ est égal à $\left|\, \mathrm{Rés}\,(1-t^m, \prod_{i=1}^{r} \lambda_i) \,\right|$.

Remarques. 1) $\prod \lambda_i$ ne dépend que de A, puisqu'il s'agit d'un générateur primitif du premier idéal élémentaire de $A \otimes \mathbf{Q}$, normalisé, suivant nos conventions, pour que ce soit un « vrai » polynôme de terme constant non nul. (Seul son signe est encore libre.)

2) Si $A = H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$, nous savons déjà que A satisfait les hypothèses de la proposition. De plus, la multiplication par $(1-t)$ est un isomorphisme de A. Comme $\mathbf{Z}T$ est nœthérien, ceci reste vrai pour n'importe quel module quotient de A. Ainsi $A\Big/_{B}$ satisfait les hypothèses du théorème de Kervaire.

Comme il est de $\mathbf{Z}$-torsion par l'affirmation 2, il est fini. Toutes les hypothèses de la proposition sont donc satisfaites, ce qui démontre la formule de Fox, puisque $\prod \lambda_i = \Delta$.

3) Nous laissons au lecteur le soin de faire la liste des conditions qui rendent la formule valable pour les nœuds de dimension supérieure.

Preuve de la proposition. Par exactitude à droite du produit tensoriel, on a:

$$A \Big/ (1-t^m)A \otimes \mathbf{Q} \approx A \otimes \mathbf{Q} \Big/ (1-t^m)(A \otimes \mathbf{Q}).$$

Donc: $A \Big/ (1-t^m)A$ est de $\mathbf{Z}$-torsion si et seulement si $1 - t^m : A \otimes \mathbf{Q} \to A \otimes \mathbf{Q}$ est injectif (puisque le rang sur $\mathbf{Q}$ de $A \otimes \mathbf{Q}$ est fini).

Si l'on passe à une décomposition de $A \otimes \mathbf{Q}$ en somme de modules cycliques, on voit que ceci a lieu si et seulement si $(1-t^m)$ et Δ n'ont pas de facteurs communs, c'est-à-dire si et seulement si Rés $(1-t^m, \Delta) \neq 0$.

Considérons alors le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & B & \to & A & \to & A/B \to 0 \\ & & \Phi_1 \downarrow & & \Phi_2 \downarrow & & \Phi_3 \downarrow \\ 0 & \to & B & \to & A & \to & A/B \to 0 \end{array}$$

où les homomorphismes Φ_i sont la multiplication par $(1-t^m)$.
Si Rés $(1-t^m, \Delta) \neq 0$, Ker $\Phi_2 = 0$ et la suite Ker-Coker associée au diagramme précédent devient

$$0 \to \text{Ker } \Phi_3 \to \text{Coker } \Phi_1 \to \text{Coker } \Phi_2 \to \text{Coker } \Phi_3 \to 0 .$$

Maintenant, comme $A \Big/ B$ est fini, on a

$$|\text{Ker } \Phi_3| = |\text{Coker } \Phi_3| \quad (\text{où } |E| \text{ désigne le cardinal de l'ensemble } E).$$

D'autre part, Rés $(1-t^m, \Delta) \neq 0$ implique (cf. § 2) que $|\text{Coker } \Phi_1|$ est fini. Donc $|\text{Coker } \Phi_2|$ l'est aussi et la suite Ker-Coker implique $|\text{Coker } \Phi_1| = |\text{Coker } \Phi_2|$.

Il suffit donc de démontrer la formule de Fox pour le module B à la place du module A.

Si B est cyclique, cela résulte de la proposition du § 2. Si B est somme de modules cycliques, cela résulte de cette proposition et de la multiplicativité du résultant. C.q.f.d.

Remarque. L'argument ci-dessus basé sur la suite Ker-Coker indique pourquoi la démonstration de Fox (qui suppose plus ou moins implicitement que $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ est somme de modules cycliques) a permis de trouver néanmoins la formule correcte.