

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: IV. RÉSOLUTIONS DES QUOTIENTS DE $\mathbb{C}^2$ PAR UN GROUPE CYCLIQUE FINI
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-50380>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IV. RÉOLUTIONS DES QUOTIENTS DE $\mathbb{C}^2$ PAR UN GROUPE CYCLIQUE FINI

IV.1. DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

Si X est un ensemble analytique, une *résolution* ¹⁾ de X est la donnée d'une variété complexe lisse $\tilde{X}$ et d'une application holomorphe propre surjective $\rho: \tilde{X} \rightarrow X$ ayant la propriété suivante: si $A = \rho^{-1}(X - X_{\text{rég}})$, alors $\tilde{X} - A$ est dense dans $\tilde{X}$ et la restriction de ρ est un isomorphisme de $\tilde{X} - A$ sur $X_{\text{rég}}$. (Le terme n'a donc pas ici le même sens qu'à la section I.3, où il s'agissait d'une « situation relative » où un ensemble analytique (= courbe) étant plongé dans une variété (= plan).) Lorsque $X - X_{\text{rég}}$ est réduit à un point x_0 , on appelle *fibre exceptionnelle* de la résolution le sous-ensemble analytique $\rho^{-1}(x_0)$ de $\tilde{X}$.

Exemple 1. Soit $X = \{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \}$, qui est une surface lisse en dehors de l'origine; le changement de variables $\xi = ix + y$, $\eta = ix - y$ montre que X est isomorphe à $A_{2,1}$. L'image Q de ses points réguliers par la projection canonique $h: \mathbb{C}^3 - \{0\} \rightarrow P^2$ est une courbe projective lisse $\{ [x, y, z] \in P^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \}$. On en précise la nature grâce à l'application homogène

$$\tilde{\varphi}: \begin{cases} \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (s, t) \mapsto \left(\frac{i}{2} (s^2 + t^2), \frac{1}{2} (s^2 - t^2), st \right) \end{cases};$$

elle factorise en un morphisme $\varphi: P^1 \rightarrow Q$ qui est bijectif et qui est donc un isomorphisme.

Considérons $S = \{ ([z], w) \in P^2 \times \mathbb{C}^3 \mid w \in h^{-1}([z]) \cup \{0\} \}$ et la restriction $\pi: S \rightarrow \mathbb{C}^3$ de la seconde projection. On montre comme en I.3 que S est une variété lisse, qui est incidemment l'espace total du fibré canonique sur P^2 . Le morphisme π est propre, induit un isomorphisme de $S - \pi^{-1}(0)$ sur $\mathbb{C}^3 - \{0\}$, et sa « fibre exceptionnelle » est $\pi^{-1}(0) = P^2$; c'est par définition l'*éclatement* de $\mathbb{C}^3$ à l'origine.

¹⁾ On dit parfois « désingularisation » au lieu de « résolution ».

Posons $\tilde{X} = \{([z], w) \in S \mid [z] \in Q\}$; l'application $\lambda: \tilde{X} \rightarrow Q$ définie par $\lambda([z], w) = [z]$ est la restriction à Q du fibré canonique de P^2 . Alors l'application $\rho: \tilde{X} \rightarrow X$ qui envoie $([z], w)$ sur w est une résolution de X avec fibre exceptionnelle $E = \rho^{-1}(0)$ isomorphe à P^1 .

Plus généralement, soit X^d un cône de degré d dans $\mathbf{C}^{k+1}$ ayant une singularité isolée à l'origine, de sorte que $Q^d = h(X^d - \{0\})$ est lisse dans P^k . Soient S l'espace total du fibré canonique sur P^k et $\pi: S \rightarrow \mathbf{C}^{k+1}$ l'éclatement de $\mathbf{C}^{k+1}$ à l'origine. Posons $\tilde{X}^d = \{([z], w) \in S \mid [z] \in Q^d\}$. Alors la restriction $\rho: \tilde{X}^d \rightarrow X^d$ de π est une résolution de X^d avec fibre exceptionnelle isomorphe à Q^d .

Exemple 2. Soit $X = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0\}$, qui s'écrit en d'autres coordonnées $\{(v_1, v_2, w_1, w_2) \in \mathbf{C}^4 \mid v_1 w_2 = v_2 w_1\}$ et qui est un ensemble de dimension 3 lisse en dehors de l'origine. La sous-variété correspondante Q de P^3 est une surface lisse. L'application

$$\tilde{\varphi}: \begin{cases} \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^4 \\ ((u_1, u_2), (u_3, u_4)) \mapsto (u_1 u_3, u_2 u_4, u_1 u_4, u_2 u_3) \end{cases}$$

factorise en un morphisme bijectif $P^1 \times P^1 \rightarrow Q$, donc en un isomorphisme. (La vérification de la bijectivité est un exercice facile. Le fait que les morphismes bijectifs sont des isomorphismes, qui est élémentaire en dimension 1, est pour les dimensions supérieures un théorème non banal: voir par exemple [2], page 179.)

Le procédé décrit à la fin de l'exemple 1 consiste à poser

$$\tilde{X} = \{([z], w) \in P^3 \times \mathbf{C}^4 \mid [z] \in Q \quad \text{et} \quad w \in h^{-1}([z]) \cap \{0\}\}$$

et

$$\rho: \begin{cases} \tilde{X} \rightarrow X \\ ([z], w) \mapsto w \end{cases}.$$

C'est une résolution avec fibre exceptionnelle de dimension $2 = \dim(X) - 1$ isomorphe à $P^1 \times P^1$.

On peut aussi considérer

$$\tilde{Y} = \{([z], v, w) \in P^1 \times \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \mid v \text{ et } w \text{ dans } h^{-1}([z]) \cup \{0\}\}$$

qui est l'espace total de la somme de Whitney de deux fibrés canoniques

sur P^1 . Alors $\sigma : \begin{cases} \tilde{Y} \rightarrow X \\ ([z], v, w) \mapsto (v, w) \end{cases}$ est aussi une résolution de X avec fibre exceptionnelle de dimension 1.

Cet exemple montre en particulier que la fibre exceptionnelle d'une résolution $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ avec X à point singulier unique x_0 ne dépend pas seulement du germe de X en x_0 , mais aussi fortement de ρ . Toutefois, lorsqu'on se restreint à des espaces X de dimension deux, on peut lever cette ambiguïté: il existe en effet dans ce cas une unique « résolution minimale » pour tout germe de surface avec singularité isolée, et la fibre exceptionnelle d'une telle résolution en un point singulier ne dépend que du germe de la singularité; voir [13], chapitre V.

Rappelons qu'un *diviseur* D dans une variété lisse M (ci-dessous toujours connexe) est une famille $(D_\beta, n_\beta)_{\beta \in B}$ où les D_β sont des sous-ensembles analytiques fermés de codimension un dans M , où les n_β sont des entiers rationnels, et où la famille $\{\beta \in B \mid D_\beta \cap K \neq \emptyset\}$ est finie pour tout compact K de M . On écrit aussi $D = \sum_{\beta \in B} n_\beta D_\beta$, et nous noterons $|D|$ le *support* de D , c'est-à-dire le sous-espace topologique de M qui est réunion des ensembles D_β pour lesquels $n_\beta \neq 0$.

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe non nulle. Soient Z_f [resp. P_f] l'ensemble des zéros [resp. des pôles] de f ; on sait que ce sont des sous-ensembles de codimension 1 dans M (ou l'ensemble vide); voir [8], VIII.B.4. Soit $(Z_{f,i})_{i \in I}$ l'ensemble des composantes connexes des points réguliers de Z_f . Pour chaque $i \in I$, soient D_i l'adhérence de $Z_{f,i}$ dans M et n_i l'ordre du zéro de f en un point de $Z_{f,i}$ (qui est indépendant du choix de ce point); on sait que $\{i \in I \mid |D_i| \cap K \neq \emptyset\}$ est fini pour tout compact K de M . On définit de même $(P_{f,j})_{j \in J}$ puis, pour chaque $j \in J$, l'ensemble irréductible D_j et l'ordre n_j du pôle de f en un point de $P_{f,j}$. On appelle *diviseur de la fonction f* et on note D_f le diviseur $\sum n_i D_i - \sum n_j D_j$.

Les diviseurs de M forment pour l'addition naturelle un *groupe abélien* $\text{Div}(M)$, et ceux à supports compacts un sous-groupe $\text{Div}_c(M)$.

Si M est de dimension deux, on définit une *forme d'intersection*

$$\begin{cases} \text{Div}(M) \times \text{Div}_c(M) \rightarrow \mathbb{Z} \\ (D, E) \mapsto \langle D | E \rangle \end{cases}$$

dont l'existence repose sur la dualité de Poincaré et dont nous utiliserons les propriétés suivantes:

- (j) $\langle | \rangle$ est *bilinéaire*;

- (jj) la restriction de $\langle \mid \rangle$ à $\text{Div}_c(M) \times \text{Div}_c(M)$ est *symétrique*;
- (jjj) si D_1 et D_2 sont des courbes irréductibles lisses à *intersections transverses*, $\langle D_1 \mid D_2 \rangle$ est le cardinal de $|D_1| \cap |D_2|$;
- (jv) si $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ est une *fonction méromorphe*, $\langle D_f \mid E \rangle = 0$ pour tout $E \in \text{Div}_c(M)$;
- (v) si D est irréductible à support compact, $\langle D \mid D \rangle$ est l'évaluation de la *classe de Chern* du diviseur D sur la classe fondamentale $[D]$.
- (vj) Soient M' une variété lisse, U [respectivement U'] un ouvert de M [resp. de M'], et $\phi: U \rightarrow U'$ un *isomorphisme*. Si $D \in \text{Div}(M)$ et $E \in \text{Div}_c(M)$ ont leurs supports dans U , alors $\langle \phi(D) \mid \phi(E) \rangle = \langle D \mid E \rangle$.

Voir par exemple le § 9 de [11].

Soit $\rho: \tilde{X} \rightarrow X$ une résolution d'un ensemble X de dimension deux avec une unique singularité en x_0 ; supposons que la fibre exceptionnelle soit connexe et que ses composantes irréductibles soient des courbes lisses sans point triple et à intersections transverses. (Les exemples ci-dessous montrent l'intérêt de cette situation aussi bien que les résultats généraux; voir pour ceux-ci [13], théorème 5.12.) On associe à ρ sa *matrice d'intersection* $(e_{i,j})$: si $E_1, \dots, E_n$ sont les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $E = \rho^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$ (qui sont en nombre fini car ρ est propre), alors $e_{i,j} = \langle E_i \mid E_j \rangle$. Cette matrice est bien définie à conjugaison près par une matrice de permutation.

Dans l'exemple 1 ci-dessus, cette matrice est réduite au nombre -2 ; donnons-en deux raisons.

La fibre exceptionnelle $E \approx P^1$ est irréductible; c'est la section nulle du fibré en droites $\lambda: \tilde{X} \rightarrow Q$. Or l'isomorphisme $\varphi: P^1 \rightarrow Q$ est défini par l'application $\tilde{\varphi}: \mathbb{C}_{st}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{xyz}^3$, et celle-ci s'écrit aussi (avec $u = is$, $v = -it$, $\xi = ix + y$ et $\eta = ix - y$):

$$\begin{cases} \mathbb{C}_{uv}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{\xi\eta z}^3 \\ (u, v) \mapsto (v^2, u^2, uv) \end{cases}$$

Par suite, l'image inverse par φ du fibré λ sur Q est le fibré noté $\lambda_{(-2)}$ à la section I.3; il résulte de la propriété (v) ci-dessus que $\langle E \mid E \rangle = -2$.

Soient d'autre part $S_{(-2)}$ comme en I.3 et $f: S_{(-2)} \rightarrow \mathbb{C}$ le composé de $\pi_{(-2)}: S_{(-2)} \rightarrow \mathbb{C}^3$ et de la première projection $x: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$. Soit A la

transformée stricte de l'axe d'équation $x = y = 0$ dans $\mathbf{C}^3$. Alors $D_f = 2A + E$, d'où par (jv) ci-dessus

$$\langle D_f | E \rangle = 2\langle A | E \rangle + \langle E | E \rangle = 0$$

et par (jjj) $\langle E | E \rangle = -2$.

Exemple 3. Soit $S_{(-k)}$ comme à la section I.3, avec deux cartes — disons deux copies R_0 et R_1 de $\mathbf{C}^2$ — recollées selon l'isomorphisme que nous écrirons ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(u, v) \in R_0 \mid u \neq 0\} \rightarrow \{(u, v) \in R_1 \mid v \neq 0\} \\ (u, v) \mapsto (u^k v, 1/u) \end{array} \right.$$

Considérons d'une part les fonctions $\xi_0, \eta_0, \zeta_0: R_0 \rightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_0(u, v) = u^k v \quad \eta_0(u, v) = v \quad \zeta_0(u, v) = uv$$

et d'autre part les fonctions $\xi_1, \eta_1, \zeta_1: R_1 \rightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_1(u, v) = u \quad \eta_1(u, v) = uv^k \quad \zeta_1(u, v) = uv^{k-1}.$$

On vérifie sans peine que ces données définissent trois fonctions globales $\xi, \eta, \zeta: S_{(-k)} \rightarrow \mathbf{C}$ satisfaisant l'égalité $\zeta^k = \xi\eta^{k-1}$, donc aussi une application $\rho: S_{(-k)} \rightarrow A_{k,1}$. Le lecteur s'assurera à titre d'exercice que ρ est une résolution de $A_{k,1}$, que la matrice d'intersection se réduit au nombre $-k$, et que ρ se relève en $\tilde{\rho}: S_{(-k)} \rightarrow X_{k,1}$. L'application $\tilde{\rho}$ résout donc la singularité définie par le groupe cyclique

$$\left\{ \begin{pmatrix} e(j/k) & 0 \\ 0 & e(j/k) \end{pmatrix} \in \text{Aut}(\mathbf{C}^2) \mid j = 0, \dots, k-1 \right\}.$$

Si $k = 2$, on retrouve l'exemple 1.

Citons enfin sans démonstration le théorème suivant: pour toute singularité isolée de dimension deux et pour toute désingularisation (minimale ou non), la matrice d'intersection associée est négative définie. Les exemples ci-dessus offrent une première illustration de ce résultat. Voir [16], § 1.

IV.2. TROIS SUITES NUMÉRIQUES DÉFINIES PAR n ET q

Le contenu des paragraphes 2 et 3 se trouve dans [9].

Soient n et q des entiers avec $0 < q < n$.

Posons $\lambda_0 = n$ et $\lambda_1 = q$. Définissons ensuite les entiers $\lambda_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ par l'algorithme euclidien suivant:

$$\lambda_2 = b_1 \lambda_1 - \lambda_0 \quad \text{avec} \quad b_1 \geq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda_2 < \lambda_1$$

$$\lambda_3 = b_2 \lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{avec} \quad b_2 \geq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda_3 < \lambda_2$$

Soit s le plus grand entier pour lequel λ_s soit non nul, de sorte que

$$\lambda_s = b_{s-1} \lambda_{s-1} - \lambda_{s-2} \quad \text{avec} \quad b_{s-1} \geq 0 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_s < \lambda_{s-1}$$

$$0 = b_s \lambda_s - \lambda_{s-1}.$$

On vérifie sans peine que λ_s est le plus grand commun diviseur de n et q , ce qui s'écrit $\lambda_s = (n, q)$. On définit $\lambda_{s+1} = 0$. On peut remarquer que les équations ci-dessus s'écrivent aussi

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{\lambda_2}{q}, \quad \frac{q}{\lambda_2} = b_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \quad \dots,$$

$$\frac{\lambda_{s-2}}{\lambda_{s-1}} = b_{s-1} - \frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}} = b_{s-1} - \frac{1}{b_s}.$$

D'où

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \frac{1}{b_4 - \dots - \frac{1}{b_s}}}}$$

ce que certains auteurs notent plus économiquement

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2} - \dots - \frac{1}{b_s}.$$

On définit ensuite les suites $(\mu_k)_{k=0, \dots, s+1}$ et $(v_k)_{k=0, \dots, s+1}$ par

$\mu_0 = 0$	$v_0 = 1$
$\mu_1 = 1$	$v_1 = 1$
$\mu_2 = b_1 \mu_1 - \mu_0$	$v_2 = b_1 v_1 - v_0$
.....	
$\mu_s = b_{s-1} \mu_{s-1} - \mu_{s-2}$	$v_s = b_{s-1} v_{s-1} - v_{s-2}$
$\mu_{s+1} = b_s \mu_s - \mu_{s-1}$	$v_{s+1} = b_s v_s - v_{s-1}$

Lemme. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, s\}$ on a :

$$(a) \quad \lambda_k + (n-q) \mu_k = n v_k$$

$$(b) \quad \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \mu_k = n$$

$$(c) \quad \mu_{k+1} v_k - \mu_k v_{k+1} = 1.$$

De plus

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_{s+1} = \frac{n}{(n, q)}$$

et

$$1 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{s+1} = \frac{n-q}{(n, q)}.$$

Preuve. Les relations (a), (b) et (c) sont banales si $k = 0$ et si $k = 1$. Pour $k \geq 2$, elles résultent des calculs élémentaires suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} + (n-q) \mu_{k+1} &= b_k \lambda_k - \lambda_{k-1} + (n-q) (b_k \mu_k - \mu_{k-1}) \\ &= b_k (\lambda_k + (n-q) \mu_k) - (\lambda_{k-1} + (n-q) \mu_{k-1}) = b_k n v_k - n v_{k-1} \\ &= n v_{k+1} \quad (k=1, \dots, s); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} \mu_{k+2} - \lambda_{k+2} \mu_{k+1} &= \lambda_{k+1} (b_{k+1} \mu_{k+1} - \mu_k) - (b_{k+1} \lambda_{k+1} - \lambda_k) \mu_{k+1} \\ &= \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \mu_k \quad (k=1, \dots, s-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{k+2} v_{k+1} - \mu_{k+1} v_{k+2} &= (b_{k+1} \mu_{k+1} - \mu_k) v_{k+1} - \mu_{k+1} (b_{k+1} v_{k+1} - v_k) \\ &= \mu_{k+1} v_k - \mu_k v_{k+1} \quad (k=1, \dots, s-1). \end{aligned}$$

En particulier, comme $\lambda_{s+1} = 0$, on a $0 + (n-q) \mu_{s+1} = n v_{s+1}$ et $\lambda_s \mu_{s+1} = n$, d'où $\mu_{s+1} = \frac{n}{\lambda_s} = \frac{n}{(n, q)}$ et $v_{s+1} = \frac{n-q}{(n, q)}$. Enfin, comme $b_k \geq 2$ pour $k = 1, \dots, s$, on a

$$\mu_{k+1} - \mu_k = (b_k - 1) \mu_k - \mu_{k-1} \geq \mu_k - \mu_{k-1} \geq \dots \geq \mu_1 - \mu_0 > 0$$

et

$$v_{k+1} - v_k \geq \dots \geq v_1 - v_0 \geq 0.$$

ce qui achève la preuve. ■

Nous reviendrons à plusieurs reprises sur les exemples décrits dans le tableau suivant :

n	10	8	6	4
q	8	6	4	2
s	4	3	2	1
$(\lambda_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(10,8,6,4,2,0)	(8,6,4,2,0)	(6,4,2,0)	(4,2,0)
$(\mu_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(0,1,2,3,4,5)	(0,1,2,3,4)	(0,1,2,3)	(0,1,2)
$(v_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1)

IV.3. LES RÉOLUTIONS $\rho: M_{n,q} \rightarrow A_{n,q}$ OU $\tilde{\rho}: M_{n,q} \rightarrow X_{n,q}$

Soient à nouveau n et q comme à la section 2, dont on reprend toutes les notations.

Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, s\}$, désignons par R_k une copie de C^2 , par (u_k, v_k) ses coordonnées canoniques, et par R'_k [resp. R''_k] l'ouvert de ses points de première [resp. seconde] coordonnée non nulle. Pour $k \in \{1, \dots, s\}$, soit

$$\varphi_{k-1}: \begin{cases} R'_{k-1} & \rightarrow & R''_k \\ (u_{k-1}, v_{k-1}) & \mapsto & ((u_{k-1})^{b_k} v_{k-1}, (u_{k-1})^{-1}) \end{cases};$$

c'est un isomorphisme dont l'inverse applique (u_k, v_k) sur $(1/v_k, v_k^{b_k} u_k)$. Notons $R_{0,1}$ la variété obtenue en recollant R_0 et R_1 selon φ_0 , déjà considérée à l'exemple 3 de la section 1. Soient ensuite $R_{0,1,2}$ la variété obtenue en recollant $R_{0,1}$ et R_2 selon φ_1 , ..., et $R_{0,1,\dots,s} = M_{n,q}$ la variété obtenue en recollant $R_{0,1,\dots,s-1}$ et R_s selon φ_{s-1} . Nous identifierons chaque R_k à son image dans $M_{n,q}$. La variété $M_{n,q}$ est une *surface lisse* dans laquelle chaque R_k est un ouvert dense (de fait un ouvert de Zariski).

Pour chaque $k \in \{1, \dots, s\}$, considérons la *courbe*

$$\sigma_k = \{(u_{k-1}, v_{k-1}) \in R_{k-1} \mid v_{k-1} = 0\} \cup \{(u_k, v_k) \in R_k \mid u_k = 0\}$$

qui est lisse et isomorphe à P^1 . Notons encore σ_{in} et σ_{fi} les courbes lisses non compactes définies respectivement par $\{(u_0, v_0) \in R_0 \mid u_0 = 0\}$

et $\{(u_s, v_s) \in R_s \mid v_s = 0\}$. Ces courbes n'ont pas d'intersection triple et n'ont deux à deux que des intersections transverses. On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{in} \mid \sigma_k \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \langle \sigma_j \mid \sigma_k \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } |j - k| = 1 \\ 0 & \text{si } |j - k| \geq 2 \end{cases} \\ \langle \sigma_{fi} \mid \sigma_k \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, s\}$, considérons enfin les *fonctions*

$$\begin{aligned} \xi_k &: \begin{cases} R_k \rightarrow \mathbf{C} \\ (u_k, v_k) \mapsto (u_k)^{\lambda_k} (v_k)^{\lambda_k+1} \end{cases} \\ \eta_k &: \begin{cases} R_k \rightarrow \mathbf{C} \\ (u_k, v_k) \mapsto (u_k)^{\mu_k} (v_k)^{\mu_k+1} \end{cases} \\ \zeta_k &: \begin{cases} R_k \rightarrow \mathbf{C} \\ (u_k, v_k) \mapsto (u_k)^{\nu_k} (v_k)^{\nu_k+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Si $k \geq 1$ et $u_{k-1} \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \xi_k(\varphi_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1})) &= ((u_{k-1})^{b_k} v_{k-1})^{\lambda_k} \left(\frac{1}{u_{k-1}} \right)^{\lambda_k+1} \\ &= (u_{k-1})^{b_k \lambda_k - \lambda_k + 1} (v_{k-1})^{\lambda_k} = \xi_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1}). \end{aligned}$$

Par suite les ξ_k définissent une fonction globale $\xi: M_{n,q} \rightarrow \mathbf{C}$. Les η_k et les ζ_k définissent de même $\eta, \zeta: M_{n,q} \rightarrow \mathbf{C}$. Notons que $\zeta^n = \xi \eta^{n-q}$. Il suffit en effet de vérifier cette relation sur l'ouvert dense $R_0 \subset M_{n,q}$, et on a pour tout $(u, v) \in R_0$:

$$(\zeta(u, v))^n - (\xi(u, v))(\eta(u, v))^{n-q} = (uv)^n - (u^n v^q)(v)^{n-q} = 0.$$

Nous noterons $\rho: M_{n,q} \rightarrow A_{n,q}$ le morphisme défini par $\rho(P) = (\xi(P), \eta(P), \zeta(P))$.

PROPOSITION 16. Le morphisme $\rho: M_{n,q} \rightarrow A_{n,q}$ est surjectif, $\rho^{-1}(0, 0, 0) = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s$, $\rho^{-1}\{(0, y, 0) \in A_{n,q} \mid y \in \mathbf{C}\} = \rho_{in}$ et $\rho^{-1}\{(x, 0, 0) \in A_{n,q} \mid x \in \mathbf{C}\} = \sigma_{fi}$.

Si de plus $(n, q) = 1$, la restriction de ρ fournit une bijection de $M_{n,q}$

$$- \bigcup_{k=1}^s \sigma_k \text{ sur } A_{n,q} - \{0\}.$$

Preuve. Il est immédiat que $\rho(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s) = (0, 0, 0)$.

Soit $P = (x, y, z) \in A_{n,q}$ avec $y \neq 0$. Posons $u_0 = z/y$ et $v_0 = y$; alors $\rho(u_0, v_0) = (u_0^n v_0^q, v_0, u_0 v_0) = P$. Soit $(u_k, v_k) \in \rho^{-1}(P) \cap R_k$; alors $\eta(u_k, v_k) = (u_k)^{\mu_k} (v_k)^{\mu_k+1} = y \neq 0$. Si $k \geq 1$, les entiers μ_k et μ_{k+1} sont strictement positifs, donc $u_k \neq 0$ et $v_k \neq 0$, de sorte que $(u_k, v_k) \in R_k \cap R_0$. Si $k = 0$, les équations $u_0^n v_0^q = x$, $v_0 = y$, $u_0 v_0 = z$ n'ont qu'une solution. Nous avons ainsi montré que $\rho^{-1}(P)$ ne contient qu'un point, qui n'est pas dans la réunion des σ_k , et qui est dans σ_{in} si et seulement si $P = (0, y, 0)$.

Soit $Q = (x, 0, 0) \in A_{n,q}$ avec $x \neq 0$ (rappelons que c'est un point singulier de $A_{n,q}$ si $q \neq n-1$). Pour $k \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, les équations $(u_k)^{\lambda_k} (v_k)^{\lambda_k+1} = x \neq 0$, $(u_k)^{\mu_k} (v_k)^{\mu_k+1} = (u_k)^{v_k} (v_k)^{v_k+1} = 0$ n'ont aucune solution. Par contre, les équations

$$(u_s)^{\lambda_s} = x \quad (u_s)^{\mu_s} (v_s)^{\mu_s+1} = (u_s)^{v_s} (v_s)^{v_s+1} = 0$$

ont précisément $\lambda_s = (n, q)$ solutions. Donc $\gamma^{-1}(Q)$ contient (n, q) points, donc aucun n'est dans la réunion des σ_k , et qui sont tous dans σ_{fi} . ■

PROPOSITION 17. On a $\langle \sigma_k | \sigma_k \rangle = -b_k$ pour $k \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Preuve. Les diviseurs définis par les fonctions ξ , η et ζ sont respectivement

$$D_\xi = n\sigma_{in} + q\sigma_1 + \dots + \lambda_k \sigma_k + \dots + (n, q) \sigma_s$$

$$D_\eta = \sigma_1 + \dots + \mu_k \sigma_k + \dots + \mu_s \sigma_s + \frac{n}{(n, q)} \sigma_{fi}$$

$$D_\zeta = \sigma_{in} + \sigma_1 + \dots + v_k \sigma_k + \dots + v_s \sigma_s + \frac{n-q}{(n, q)} \sigma_{fi}$$

Si on écrit provisoirement σ_0 pour σ_{in} et σ_{s+1} pour σ_{fi} , la première de ces formules et les calculs précédant la proposition 16 montrent qu'on a

$$0 = \langle D_\xi | \sigma_k \rangle = \lambda_{k-1} \langle \sigma_{k-1} | \sigma_k \rangle + \lambda_k \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle + \lambda_{k+1} \langle \sigma_{k+1} | \sigma_k \rangle$$

d'où

$$\langle \sigma_k | \sigma_k \rangle = (-1/\lambda_k) (\lambda_{k+1} + \lambda_{k-1}) = -b_k$$

pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$. On pourrait aussi utiliser

$$0 = \langle D_\eta | \sigma_k \rangle \Rightarrow \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle = (-1/\mu_k) (\mu_{k+1} + \mu_{k-1}) = -b_k$$

ou

$$0 = \langle D_\zeta | \sigma_k \rangle \Rightarrow \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle = (-1/v_k) (v_{k+1} + v_{k-1}) = -b_k. \quad \blacksquare$$

On peut remarquer qu'il n'existe aucun prolongement de la forme d'intersection à $\text{Div}(M) \times \text{Div}(M)$ qui jouisse encore des propriétés (j) à (v) du § 1. En effet, on aurait alors par exemple

$$0 = \langle D_\xi | \sigma_{in} \rangle = n \langle \sigma_{in} | \sigma_{in} \rangle + q \Rightarrow \langle \sigma_{in} | \sigma_{in} \rangle = -q/n$$

$$0 = \langle D_\eta | \sigma_{in} \rangle = 1 !!!$$

$$0 = \langle D_\zeta | \sigma_{in} \rangle = \langle \sigma_{in} | \sigma_{in} \rangle + \langle \sigma_1 | \sigma_{in} \rangle \Rightarrow \langle \sigma_{in} | \sigma_{in} \rangle = -1$$

ce qui est plusieurs fois absurde.

COROLLAIRE. La matrice d'intersection $\langle \sigma_j | \sigma_k \rangle_{1 \leq j, k \leq s}$ est définie négative. Si $q = n - 1$, c'est la matrice de Cartan A_{n-1} .

Remarque. Le déterminant de A_{n-1} est en valeur absolue l'ordre du groupe d'homologie $H_1(X_{n,n-1} - \{0\}, \mathbb{Z})$; voir [16], page 11.

Preuve. La matrice d'intersection est

$$\begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -b_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -b_s \end{bmatrix}$$

Si D_k est son k -ième mineur principal, on a $D_s = -b_s D_{s-1} - D_{s-2}$. Il résulte de critères standards (voir par exemple [6], § 36, exercice 33) que la matrice d'intersection est négative définie. Si $q = n - 1$, on a $s = n - 1$ et par induction $D_s = \det(A_{n-1}) = (-1)^s n$. ■

Nous résumons les informations obtenues jusqu'ici dans le résultat suivant.

THÉOREME A. Le morphisme ρ se relève en une désingularisation

$$\tilde{\rho} : M_{n,q} \rightarrow X_{n,q}.$$

Le schéma de Dynkin, qui a un sommet muni de l'entier $b_k = - \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle$ pour chaque composante irréductible σ_k de la fibre exceptionnelle, et une arête liant les sommets définis par σ_j et σ_k si $\langle \sigma_j | \sigma_k \rangle \neq 0$, est

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & & b_s \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet \end{array} \quad (\bullet = P^1)$$

Si $q = n - 1$, la matrice $\langle \sigma_j | \sigma_k \rangle_{1 \leq j, k \leq s}$ est la matrice de Cartan A_{n-1} .

Preuve. L'existence de $\tilde{\rho}$ résulte de la proposition 8; les autres affirmations de ce qui précède. ■

IV.4. RELATION AVEC LES ÉCLATEMENTS

Soit $\pi: S \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'éclatement de $\mathbb{C}^2$ à l'origine, comme en I.3. Considérons ici $T = \mathbb{C} \times S$ et $\tau: T \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'application $\text{id} \times \pi$ qui est l'éclatement de $\mathbb{C}^3$ le long de la droite d'équations $y = z = 0$. On munit T comme en I.3 d'un atlas à deux cartes $\psi_j: T_j \rightarrow \mathbb{C}^3$ ($j = 0, 1$), avec les changements de cartes donnés par

$$\begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} = \psi_0(T_0 \cap T_1) \rightarrow \psi_1(T_0 \cap T_1) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ (x, y, z) \mapsto (x, 1/y, yz) \end{cases}$$

et par l'isomorphisme inverse. L'application τ s'écrit dans les cartes

$$\tau_0: \begin{cases} \mathbb{C}^3 = \psi_0(T_0) \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, z, yz) \end{cases}$$

et

$$\tau_1: \begin{cases} \mathbb{C}^3 = \psi_1(T_1) \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, yz, z) \end{cases}$$

La transformée stricte de $A_{n,q} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q} \}$ apparaît dans une carte comme la surface lisse

$$\{ (x, y, z) \in \psi_0(T_0) \mid y^n z^q = x \}$$

et dans l'autre comme

$$\{ (x, y, z) \in \psi_1(T_1) \mid z^q = xy^{n-q} \} \approx A_{q, 2q-n}.$$

Au niveau des normalisés, l'éclatement permet donc de « remplacer » $X_{n,q}$ par $X_{q,\lambda}$ avec $0 < \lambda < q$ et $\lambda = (2+r)q - n$ pour un entier positif

convenable r (nous avons utilisé ici les remarques qui précèdent la proposition 13). Avec les notations de la section 2, on a précisément $\lambda = \lambda_2$ et $2 + r = b_1$.

En cherchant à itérer l'argument jusqu'à trouver une surface lisse, on aurait précisément à considérer les suites numériques de la section 2.

V. L'ICOSAÈDRE ET LES SOUS-GROUPES FINIS NON CYCLIQUES DE $SU(2)$

V.1. LE CAS DE L'ICOSAÈDRE

Soient $h: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow P^1 = \mathbf{S}^2$ la projection canonique et $\delta: SU(2) \rightarrow SO(3)$ le revêtement universel (à deux feuillets) du groupe des automorphismes analytiques isométriques de P^1 (= du groupe des rotations de la sphère). Soient $\underline{G}$ le sous-groupe de $SO(3)$ des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier inscrit dans $\mathbf{S}^2$, et $G = \delta^{-1}(\underline{G})$; nous noterons encore δ la projection canonique de G sur $\underline{G}$. Le groupe $\underline{G}$ a 60 éléments; ses orbites sur $\mathbf{S}^2$ ont aussi 60 points à trois exceptions près qui sont

l'orbite $\underline{\mathcal{A}} = \{ \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{12} \}$ des sommets de l'icosaèdre

l'orbite $\underline{\mathcal{B}} = \{ \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{20} \}$ des barycentres de ses faces

l'orbite $\underline{\mathcal{C}} = \{ \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{30} \}$ des milieux de ses arêtes.

Le groupe G agit linéairement dans $\mathbf{C}^2$; ses orbites ont toutes 120 points, à la seule exception de l'origine.

Le quotient $X_{ico} = \mathbf{C}^2/G$ est un ensemble analytique, normal par le théorème de Cartan; il a un unique point non lisse, que nous noterons x_0 et qui est l'image canonique de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Nous renvoyons à [12], chapitre II, § 13 et/ou à [15], théorème 4.5 pour le résultat classique suivant (dont nous ne faisons pas usage ci-dessous): il existe une application polynômiale $\tilde{\phi}: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^3$ qui fournit par passage au quotient un isomorphisme ϕ de X_{ico} sur la surface de $\mathbf{C}^3$ à singularité unique

$$A_{ico} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3 \}.$$