

3. Spirals

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

We give an argument to show the equivalence of Theorems 1 and 3. Suppose first that Theorem 1 holds. Then there exists a $\varphi \in S$ and a $\delta > 0$ such that $\|\psi - \varphi\| > \delta$ for all $\psi \in T$. Choose g conformal in L with $S_g = \varphi$, let $D = g(L)$ and suppose that f is conformal in D with $\|S_f\|_D \leq \delta$. Then $h = f \circ g$ is conformal in L ,

$$(2) \quad S_h = (S_f \circ g)(g')^2 + S_g$$

by the composition law for the Schwarzian derivative, and hence $\psi = S_h \in S$ with

$$\|\psi - \varphi\| = \|S_h - S_g\|_L = \|S_f\|_D \leq \delta.$$

Thus $\psi \notin T$, h does not have a quasiconformal extension to $\overline{\mathbf{C}}$, and $\partial f(D) = \partial h(L)$ is not a quasiconformal circle. Hence Theorem 3 holds.

Suppose next that Theorem 3 holds, let $\varphi = S_g$ where g is any conformal mapping of L onto D , and choose any $\psi \in S$ with $\|\psi - \varphi\| \leq \delta$. Then $\psi = S_h$ where h is conformal in L , $f = h \circ g^{-1}$ is conformal in D and from (2) we obtain

$$\|S_f\|_D = \|S_h - S_g\|_L = \|\psi - \varphi\| \leq \delta.$$

Hence $\partial h(L) = \partial f(D)$ is not a quasiconformal circle, h does not have a quasiconformal extension to $\overline{\mathbf{C}}$ and $\psi \notin T$. Thus the distance from φ to T is at least δ and Theorem 1 holds.

A simple modification of the above argument yields the equivalence of Theorems 2 and 4.

Theorems 1 and 3 are immediate consequences of the following result.

THEOREM 5. *There exists a simply connected domain D and a positive constant δ such that $f(D)$ is not a Jordan domain whenever f is conformal in D with $\|S_f\|_D \leq \delta$.*

3. SPIRALS

The proof of Theorem 5 is based on two results for a class of spirals.

DEFINITION. *We say that an open arc α in $\mathbf{C}$ is a b -spiral from z_1 onto z_2 if α has the representation*

$$z = (z_1 - z_2)r(t)e^{it} + z_2, \quad 0 < t < \infty,$$

where $r(t)$ is positive and continuous with

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0,$$

and where $r(t_1) \leq b r(t_2)$ for all t_1, t_2 with $|t_1 - t_2| \leq 2\pi$.

When a is a positive constant, the arc

$$\alpha = \{z = e^{(-a+i)t} : 0 < t < \infty\}$$

is an $e^{2\pi a}$ -spiral from 1 onto 0. Moreover,

$$(3) \quad k(z) |z| = c, \quad \frac{dk}{ds}(z) |z|^2 = d$$

for all $z \in \alpha$, where c and d are positive constants with $d = ac^2$, and where k and s denote the curvature and arclength of α .

The first result we need shows that a curvature condition, similar to (3), is sufficient to guarantee that an open arc is a b -spiral.

LEMMA 1. Suppose that α is an analytic open arc with 1 and 0 as endpoints, and suppose that

$$(4) \quad c_1 \leq k(z) |z| \leq c_2, \quad d_1 \leq \frac{dk}{ds}(z) |z|^2 \leq d_2$$

for all $z \in \alpha$, where c_1, c_2, d_1, d_2 are positive constants with $4\pi d_2 < c_1^2$. Then α is a rectifiable b -spiral from 1 onto 0 where

$$b = \frac{c_1 c_2}{c_1^2 - 4\pi d_2}.$$

The second result we require implies that when b is near 1, the points onto which two disjoint b -spirals converge either coincide or are separated by a distance greater than $\frac{1}{2b^2}$ times the diameter of the smaller spiral.

LEMMA 2. Suppose that α and β are disjoint b -spirals from z_1 onto z_2 and from w_1 onto w_2 , respectively. If $b \in (1, 2)$, then either $z_2 = w_2$ or

$$|z_2 - w_2| > \frac{1}{b} \min(|z_1 - z_2|, |w_1 - w_2|).$$