

4. Main theorem

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THEOREM 3. (Guillemin [10], Losik [17]). $C_{\Delta}^*(L_M, \Omega_M)$ is a model for a bundle E with fiber F_n , base space M , associated to the tangent bundle of M .

More precisely, a model for $C_{\Delta}^*(L_M, \Omega_M)$ is the DG-algebra $\Omega_M \otimes WU_n$ over Ω_M , where

$$d(1 \otimes c_i) = 0 \quad d(1 \otimes h_i) = 1 \otimes c_i - p_{i/2} \otimes 1$$

where $p_{i/2}$ is zero if i is odd and is a form representing the Pontrjagin class of M of degree $2i$ if i is even.

Note that if a foliation F on $X \times M$ transverse to the fibers $\{x\} \times M$ is given, one has a characteristic homomorphism

$$C^*(L_M, \Omega_M) \rightarrow \Omega_{X \times M}$$

One has also a morphism

$$WO_n \rightarrow C_{\Delta}^*(L_M, \Omega_M)$$

(or $WU_n \rightarrow C^*(L_M, \Omega_M)$ in case M has trivial Pontrjagin classes) whose composition with the previous one is the usual characteristic homomorphism for the foliation F (cf. [3], [12]).

4. MAIN THEOREM

THEOREM 1. $C^*(L_M)$ is a model for the space Γ of continuous sections of the bundle E described in the theorem above.

This result, first conjectured by Bott (and also Fuks), has been proved by several people (Bott-Segal¹⁾, Fuks-Segal, Haefliger [13], Ph. Trauber, and others).

Suppose that G is a compact connected Lie group acting on M . Then it also acts on the bundle E and on its space of sections. Let us denote by Γ_G the total space of the bundle with fiber Γ associated to the universal G -bundle with base space BG .

THEOREM 1'. $C^*(L_M; G)$ is a model for the space Γ_G .

The way I proved theorem 1 was to construct first a tentative algebraic model A for Γ following ideas of R. Thom [20] and D. Sullivan [18], and

¹⁾ Added on proof: *Topology* 16 (1977), pp. 285-298.

a morphism of A in $C^*(L_M)$. Then one proves directly that it induces an isomorphism in cohomology. The fact that A is also a model for Γ was proved in a similar way (cf. [14]).

When M has a finite dimensional model, one can construct a model for Γ which is finite dimensional in each degree, and with it one can make explicit calculations.

Note that the inclusion $C_{\Delta}^*(L_M, \Omega_M) \rightarrow C^*(L_M, \Omega_M)$ is a model for the evaluation map $\Gamma \times M \rightarrow E$ associating to a section s and a point x of M the element $s(x)$ of E .

For computations along the lines of the spectral sequence of Gelfand-Fuks, see Cohen and Taylor [22].

The proof of theorem 1' is very similar to the proof of theorem 1. In the next paragraph, we explain the construction of an algebraic model for Γ_G suitable for computations. In § 6, we indicate briefly why this is a model for Γ_G .

5. CONSTRUCTION OF AN ALGEBRAIC MODEL FOR THE SPACE OF SECTIONS OF A FIBER BUNDLE ([20], [18], [13]).

As a guide, consider first the geometric situation. Let $p: E \rightarrow M$ be a fiber bundle with base space M , fiber F and let Γ be the space of continuous sections of E .

We have the commutative diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & & e \\
 & & \longrightarrow \\
 M \times \Gamma & \xrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow & \searrow & \swarrow p \\
 & & M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Gamma & & * \\
 & \searrow & \\
 & & *
 \end{array}$$

1)

where e is the evaluation map associating to the point x of M and the section s the point $s(x)$ of E . The other maps are natural projections (* is a point).