

2. Connection with foliations

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

If G is the group SO_2 of rotations of S^1 , then $H(L_{S^1}; SO_2)$ is a model for $C^*(L_{S^1}; SO_2)$. It is generated by u and by an element e of degree 2 represented by

$$e(f, g) = \int_0^1 \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} dx$$

The only relation is $eu = 0$.

2. CONNECTION WITH FOLIATIONS

Let me indicate very briefly the relation with characteristic classes of flat bundles (cf. [12]).

$H^*(L_M, G)$ could also be interpreted as the differentiable cohomology of a suitable differentiable category (for more informations see [4] and [15]).

We consider on the product $X \times M$ of a smooth manifold X with M a smooth foliation F whose leaves have the same dimension as X and cut each fibers $\{x\} \times M$ transversally.

To such a foliation is naturally associated a continuous DG -algebra map

$$\chi_F : C^*(L_M) \rightarrow \Omega_X$$

where Ω_X is the DG -algebra of differential forms on X . In fact there is a bijection between such morphisms and foliations F as above.

Passing to cohomology, we get the characteristic map

$$H^*(L_M) \rightarrow H^*(X; R)$$

If we replace the trivial bundle by a bundle E with fiber M , base space X and structural group G , then for a foliation F on E complementary to the fibers, we still get a morphism

$$\chi_F : C^*(L_M; G) \rightarrow \Omega_X$$

hence a characteristic homomorphism

$$H^*(L_M, G) \rightarrow H^*(X; R)$$

Denoting by BG the classifying space for G -bundles, we also have the usual characteristic map $H^*(BG; R) \rightarrow H^*(X; R)$. This map factorizes

through a map $H^*(BG; R) \rightarrow H^*(L_M; G)$ so that we get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^*(L_M; G) \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 H^*(BG; R) & & \\
 & \searrow & \\
 & & H^*(X; R)
 \end{array}$$

So it is important to compute the map $H^*(BG; R) \rightarrow H^*(L_M; G)$. When G is a compact connected Lie group, then $H^*(BG; R)$ is the algebra $I(G)$ of invariant polynomials on the Lie algebra of G , and the map from $I(G)$ to $C^*(L_M; G)$ is given by a G -connexion in $C^*(L_M)$ (cf. [5]).

In the example above, namely $M = S^1$ and $G = SO_2$, then $H^*(BSO_2)$ is a polynomial algebra in a generator of degree 2, the Euler class, which is mapped on a non zero multiple of e .

3. THE FORMAL VECTOR FIELDS AND THE DIAGONAL COMPLEX

Given a point x on M , we can consider the Lie algebra L_M^x of infinite jets at x of vector fields on M with the quotient topology. It is isomorphic to the Lie algebra \mathfrak{a}_n of formal vector fields $\sum v_i(x) \partial/\partial x^i$ in R^n , where the $v_i(x)$ are formal power series in the coordinates x^1, \dots, x^n .

The natural map $L_M \rightarrow L_M^x$ associating to a vector field its jet at x gives a DG -algebra morphism

$$C^*(L_M^x) \rightarrow C^*(L_M)$$

where $C^*(L_M^x)$ is the algebra of multilinear alternate forms on L_M^x depending only on finite order jets.

The first and most important step in the work of Gelfand-Fuks was the complete determination of the cohomology $H^*(\mathfrak{a}_n)$ of the topological Lie algebra of formal vector fields on R^n .

THEOREM 1. (Gelfand-Fuks [8], [9]). *Let $E(h_1, \dots, h_n)$ be the exterior algebra on generators h_i of degree $2i-1$ and let $R[c_1, \dots, c_n]_{2n}^\wedge$ be the quotient of the polynomial algebra in generators c_i of degree $2i$ by the ideal of elements of degree $> 2n$.*