

## §3. Exemples

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

dynamique), et comme  $\mathbf{Z}C$  est un anneau noethérien, il en résulte que  $\sigma - 1 : M \rightarrow M$  est aussi injective. Or, la résolution  $0 \rightarrow \mathbf{Z}C \xrightarrow{d} \mathbf{Z}C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \rightarrow 0$ , où  $d(1) = z - 1$  montre que  $H_1(C, M) = \text{Ker} \{ \sigma - 1 : M \rightarrow M \} = 0$ .

L'assertion résulte aussi du fait que  $C$  est un groupe à dualité. (Cf. [B.-E.] )

### § 3. EXEMPLES

Quels groupes abéliens peuvent être sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud ?

Dans ce paragraphe on dira qu'un automorphisme  $\sigma : G \rightarrow G$  d'un groupe abélien  $G$  est *admissible* si  $\sigma - 1 : G \rightarrow G$  et  $\sigma - 1 : H_2G \rightarrow H_2G$  sont surjectifs.

Rappelons que  $H_2G$  et la deuxième puissance extérieure  $\Lambda^2G$  sont fonctoriellement isomorphes. En effet, si l'on définit  $H_2G$  par la formule  $H_2G = R \cap [F, F]/[R, F]$ , où  $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$  est une présentation de  $G$ , alors  $[F, F] \subset R$  pour  $G$  abélien et donc  $H_2G = [F, F]/[R, F]$ . On définit alors un isomorphisme  $f : \Lambda^2G \rightarrow H_2G$  par la formule  $f(g \wedge g') = [x, x'] \text{ mod } [R, F]$ , où  $x, x' \in F$  représentent  $g, g' \in G$  respectivement.

La condition sur  $H_2G$  est donc équivalente (pour  $G$  abélien) à la surjectivité de  $\Lambda^2\sigma - 1 : \Lambda^2G \rightarrow \Lambda^2G$ .

Considérons d'abord les groupes abéliens de type fini.

*Notations.* Si  $G$  est abélien de type fini, on notera  $T$  son sous-groupe de torsion et  $F = G/T$ . On a  $T = \bigoplus_p T_p$ ,  $p$  premier, où  $T_p$  est un  $p$ -groupe, et on notera

$$r_G = \text{rang de } F,$$

$$r_G(p^n) = \text{nombre de facteurs isomorphes à } \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \text{ dans } T_p.$$

**THÉORÈME 3.** *Un groupe abélien de type fini  $G$  se présente comme sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud si et seulement si*

- (1)  $r_G \neq 1, 2$ ,
- (2)  $r_G(2^n) \neq 1, 2$  pour tout  $n$ , et
- (3)  $r_G(3^n)$  n'est égal à 1 que pour une valeur de  $n$  au plus.

*Exemples.*  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$  ne sont pas des sous-groupes dérivés d'un groupe de nœud. Par contre J. Levine démontre que ces groupes

apparaissent comme  $G/[G, G]$  avec  $G =$  groupe dérivé d'un groupe de nœud. (Voir [L], et aussi [L2] pour d'autres résultats reliés au théorème 3.)

Il s'agit de démontrer qu'un groupe abélien de type fini possède un automorphisme admissible si et seulement si il satisfait aux 3 conditions du théorème.

On peut construire des automorphismes admissibles comme suit. Soient  $f = t^m - a_m t^{m-1} - \dots - a_2 t - a_1$  un polynôme à coefficients entiers et  $\sigma_f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{Z}^m$  donné par

$$\begin{aligned} \sigma_f e_i &= e_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1, \\ \sigma_f e_m &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m, \end{aligned}$$

où  $e_1, \dots, e_m$  est la base canonique de  $\mathbf{Z}^m$ .

$f$  est le polynôme caractéristique de  $\sigma_f$  qui est donc un automorphisme si et seulement si  $f(0) = a_1 = \pm 1$ .

Dans ce cas, soit  $M_f$  le  $\mathbf{Z} C$ -module  $\mathbf{Z}^m$  muni de l'action de  $C$  définie par l'automorphisme  $\sigma_f$ . On a  $M_f = \mathbf{Z} C / (f(z))$ .

Il est clair que  $\sigma_f - 1$  est surjective (donc un automorphisme) si et seulement si  $f(1) = \pm 1$ .

On notera  $f^*$  le polynôme (unitaire) *réciroque* de  $f$ , i.e.

$$f^*(t) = f(0) t^{\deg f} f(t^{-1}).$$

LEMME 3.1. Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes comme ci-dessus; i.e.  $f, g \in \mathbf{Z}[t]$ , et  $f(0), g(0), f(1), g(1) = \pm 1$ . Supposons qu'il existe des polynômes  $U, V \in \mathbf{Z}[t]$  tels que  $Uf^* + Vg = 1$ .

Alors,  $M_f \otimes M_g$  muni de l'automorphisme  $\sigma_f \otimes \sigma_g$  est parfait.

En particulier, si  $f = g$  on conclut que  $\Lambda^2 M_f$ , quotient du  $\mathbf{Z} C$ -module parfait  $M_f \otimes M_f$ , est lui-même parfait.

*Preuve du lemme.* Le polynôme caractéristique de  $\sigma_f \otimes \sigma_g$  est  $F = \prod_{i,j} (t - \alpha_i \beta_j)$ , où  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  resp.  $\beta_1, \dots, \beta_n$  sont les racines de  $f$ , resp.  $g$ . Il s'agit de démontrer que  $F(1) = \pm 1$ . Soit  $K$  le corps des racines de  $f, g$ . Les éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$  sont des unités de l'anneau  $A$  des entiers de  $K$ . Il suffit de démontrer que  $F(1)$  est également une unité, i.e.  $F(1) \notin P$  pour tout idéal premier de  $A$ .

Or,  $\prod_{i,j} (1 - \alpha_i \beta_j) = \pm \prod_{i,j} (\alpha_i^{-1} - \beta_j)$ . Les éléments  $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1} \in A$  sont les racines de  $f^*$  dans  $K$ . Dire que  $\prod_{i,j} (\alpha_i^{-1} - \beta_j)$  appartient à  $P$  c'est dire que  $f^*$  et  $g$  ont une racine commune dans le corps résiduel  $A/P$ , extension de  $\mathbf{F}_p$ , où  $\mathbf{Z}_p = P \cap \mathbf{Z}$ . Ceci contredit l'équation  $Uf^* + Vg = 1$  lue mod  $p$ .

Cet argument montre que si l'on a seulement  $Uf^* + Vg = c \neq 0$ , alors  $(M_f/p^m M_f) \otimes (M_g/p^n M_g)$  est parfait pourvu que  $p$  ne divise pas  $c$ .

On considère les 3 polynômes

$$\begin{aligned} f &= t^3 - t + 1 \\ g &= t^4 - 2t^2 + t + 1 \\ h &= t^5 - t^2 + 1 \end{aligned}$$

et les modules correspondants  $M_f, M_g, M_h$  de dimensions 3, 4, 5 respectivement. Ces modules sont parfaits. On les notera  $M_3, M_4, M_5$ . De plus,  $f, g, h$  satisfont à l'hypothèse du lemme. D'abord tout  $f_k = t^{2k+1} - t^k + 1$  satisfait à l'identité

$$(1 + t + \dots + t^k) \cdot f_k^* - (t + t^2 + \dots + t^k) \cdot f_k = 1,$$

or  $f = f_1, h = f_2$ . On vérifie ensuite l'identité

$$(2 - 2t - t^2 + t^3) \cdot g^* - (1 - 3t + t^3) \cdot g = 1$$

et celles-ci:

$$\begin{aligned} (2 - t^2) \cdot f^* + (-1 + t) \cdot g &= 1, \\ (-1 + 3t - t^2 + t^3 - 2t^4) \cdot f^* + (2 - 3t + 2t^2) \cdot h &= 1, \\ (t - 2t^2 - t^3 - 2t^4) \cdot g^* + (1 - t + 3t^2 + 2t^3) \cdot h &= 1 \end{aligned}$$

qui montrent que tous les produits tensoriels  $M_i \otimes M_j, i, j = 3, 4, 5$  et les puissances extérieures  $\Lambda^2 M_i, i = 3, 4, 5$  sont des  $\mathbf{Z}C$ -modules parfaits.

Nous avons encore besoin du module  $M_2 = \mathbf{Z}e_1 + \mathbf{Z}e_2$  muni de l'automorphisme  $\sigma_\phi$  défini par  $\sigma_\phi e_1 = e_2, \sigma_\phi e_2 = e_1 - e_2$  de polynôme caractéristique  $\phi = t^2 + t - 1 \in \mathbf{Z}[t]$ .

Le module  $M_2$  est parfait et on a  $\Lambda^2 M_2 = \mathbf{Z}$  avec l'automorphisme  $\Lambda^2 \sigma_\phi = -1$ . Donc,  $\sigma_\phi$  est admissible pour  $M_2/3^n M_2$  pour tout entier positif  $n$ .

Soit alors  $G = F \oplus T$  un groupe abélien satisfaisant aux hypothèses du théorème 3. L'entier  $r_G = \text{rang } F$ , s'il est non-nul, est  $\geq 3$  et peut donc s'écrire sous la forme  $r_G = 3m_3 + 4m_4 + 5m_5$  avec  $m_3, m_4, m_5 \geq 0$ . On munit  $F$  de la structure de  $\mathbf{Z}C$ -module définie par  $m_3 M_3 + m_4 M_4 + m_5 M_5$ . De même pour  $T_2 = \bigoplus_n r_G(2^n) \cdot (\mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z})$ , on a pour tout  $n, r_G(2^n) = 0$  ou  $\geq 3$ . On peut donc choisir une décomposition  $r_G(2^n) = 3a + 4b + 5c$  avec  $a, b, c$  entiers  $\geq 0$ . On imprime sur  $r_G(2^n) \cdot (\mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z})$  la structure de  $\mathbf{Z}C$ -module définie par  $a(M_3/2^n M_3) + b(M_4/2^n M_4) + c(M_5/2^n M_5)$ .

Pour  $T_3$  on procède de même avec les facteurs  $r_G(3^n) \cdot (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$  lorsque  $r_G(3^n) \geq 3$ . Si  $r_G(3^n) = 2$ , on prend  $M_2/3^n M_2$ . Enfin, si  $r_G(3^n) = 1$ , ce qui ne peut arriver que pour une seule valeur de  $n$  au plus, on définit  $\sigma: \mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z}$  par  $\sigma(x) = -x$ .

Finalement, pour  $T_p$ ,  $p \geq 5$ , on utilise le lemme suivant.

LEMME 3.2. *Pour tout nombre premier  $p \geq 5$ , il existe un entier  $a_p \not\equiv 0, 1, -1 \pmod p$  tel que  $f(a_p) \not\equiv 0, g(a_p) \not\equiv 0$ , et  $h(a_p) \not\equiv 0 \pmod p$ .*

On définit  $\sigma_p: T_p \rightarrow T_p$  par  $\sigma_p(x) = a_p^{-1} \cdot x \pmod{p^e}$ , où  $p^e$  est l'exposant de  $T_p$ . On voit que  $T_p$  et  $\Lambda^2 T_p$  sont parfaits.

*Preuve du lemme.* Le polynôme  $f \cdot g \cdot h$  de degré 12 a au plus 12 racines dans  $\mathbf{F}_p$ . Si  $p \geq 17$ , il existe donc  $a_p \not\equiv 0, 1, -1$  et également diffèrent mod  $p$  des racines éventuelles de  $f \cdot g \cdot h$  dans  $\mathbf{F}_p$ . Pour  $p = 5$ , on prend  $a_5 = 2$ . Pour  $p = 7, 11$  ou  $13$  le nombre  $a_p = 3$  convient.

Il reste à vérifier que l'automorphisme  $\sigma: G \rightarrow G$  somme directe des automorphismes construits ci-dessus, est admissible.

D'abord  $G$  est somme directe de modules parfaits, donc  $G$  est parfait.

$\Lambda^2 G$  est somme directe de  $\mathbf{Z} C$ -modules qui sont tous des quotients de modules de l'un des types suivants, où  $i, j = 3, 4$  ou  $5$ :

- |   |  |
|---|--|
| (i) $M_i \otimes M_j$ ,                         | (v) $(M_2/3^m M_2) \otimes (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$ , |
| (ii) $M_i \otimes (M_2/3^n M_2)$ ,              | (vi) $\Lambda^2 T_p$ pour $p \geq 5$ , et                |
| (iii) $(M_2/3^m M_2) \otimes (M_2/3^n M_2)$ ,   | (vii) $M_i \otimes T_p$ pour $p \geq 5$ .                |
| (iv) $M_i \otimes (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$ , |  |

(Le type  $(\mathbf{Z}/3^m\mathbf{Z}) \otimes (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$  n'apparaît pas en vertu de la condition (3) du théorème.)

Dans cette liste, les produits tensoriels  $M_i \otimes M_j$  sont parfaits en vertu du lemme 3.1. Ceux du type (ii) sont parfaits car  $f^*, g^*, h^*$  sont premiers à  $\phi \pmod{3^n}$  comme on le vérifie facilement. Pour ceux du type (iii), on utilise l'identité

$$(1+t)\phi^* + (1-t)\phi = -2 \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Pour les types (iv) et (v), on remarque que  $f^*, g^*, h^*$  et  $\phi^*$  prennent en  $-1$  (la valeur propre de  $\sigma$  sur  $\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z}$ ) des valeurs premières à 3.

$\Lambda^2 T_p$  est parfait car  $\Lambda^2 \sigma_p$  est l'homothétie de rapport  $a_p^{-2} \not\equiv 0, 1 \pmod p$ . Enfin les modules  $M_i \otimes T_p$  sont parfaits car  $f(a_p), g(a_p)$  et  $h(a_p)$  sont inversibles mod  $p^l$  par le lemme 3.2.

Le module  $\Lambda^2 G$  est donc parfait.

Réciproquement, les conditions du théorème 3 sont nécessaires pour que  $G$  possède un automorphisme admissible.

On observe d'abord que si  $G$  est un  $\mathbf{Z} C$ -module satisfaisant  $H_0(C, H_1G) = 0$ ,  $H_0(C, H_2G) = 0$ , il en est de même de tout module quotient. La formule  $H_2G = R \cap [F, F]/[R, F]$ , où  $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$  est une présentation de  $G$ , montre immédiatement qu'une surjection  $G \rightarrow G'$  de groupes abéliens induit une surjection  $H_2G \rightarrow H_2G'$ . Cela résulte évidemment aussi de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Ensuite, comme on l'a déjà observé, tout module quotient d'un module parfait est parfait.

Si  $G$  est un  $\mathbf{Z} C$ -module parfait et de *type fini*, alors tout sous  $\mathbf{Z} C$ -module  $G_0$  de  $G$  est également parfait. (Regarder la suite croissante de sous-modules  $G_i = \{x \in G \mid (\sigma - 1)^i x \in G_0\}$ .) Il en résulte que si  $G$  est un  $\mathbf{Z} C$ -module de type fini tel que  $H_0(C, H_1G) = 0$  et  $H_0(C, H_2G) = 0$  et si  $G_0 \subset G$  est un sous  $\mathbf{Z} C$ -module de  $G$  et un  $\mathbf{Z}$ -facteur direct, alors  $H_0(C, H_1G_0) = 0$  et  $H_0(C, H_2G_0) = 0$ . Il suffit de remarquer que  $H_2G_0$  est sous  $\mathbf{Z} C$ -module de  $H_2G$  qui est de type fini.

Soit maintenant  $G$  un groupe abélien de type fini muni d'une structure de  $\mathbf{Z} C$ -module telle que  $G$  et  $H_2G$  soient parfaits.

Comme le sous-groupe de  $\mathbf{Z}$ -torsion  $T \subset G$  est un sous  $\mathbf{Z} C$ -module,  $F = G/T$  possède un automorphisme admissible. On a donc  $\text{rang } F \neq 1, 2$ . (Car  $H_2(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ .) C'est la condition (1) du théorème 3.

Pour obtenir les conditions (2) et (3), on observe d'abord que  $H_0(C, T_p) = 0$  et  $H_0(C, H_2T_p) = 0$  pour tout  $p$ . De même, avec  $V = T_p/pT_p$ , on a en vertu des remarques précédentes  $H_0(C, V) = 0$  et  $H_0(C, H_2V) = 0$ .

D'autre part l'action de  $C$  sur  $V$  se factorise par l'action d'un groupe cyclique fini  $C_m$  d'ordre  $m$ . Soit  $m = q \cdot s$  avec  $q = p^f$  et  $s$  premier à  $p$ . L'action d'un  $p$ -groupe sur  $V$  étant unipotente,  $V$  ne peut être un  $\mathbf{Z} C_m$ -module parfait que si  $s > 1$  et  $H_0(C_s, V) = 0$ , où  $C_s$  est le sous-groupe d'ordre  $s$  de  $C_m$ . Comme  $s$  est premier à  $p$ ,  $V$  est un  $\mathbf{F}_p C_s$ -module semi-simple. Une famille de sous-modules de  $V$  est fournie par les images dans  $V$  des noyaux  $\text{Ker } \{p^n: T_p \rightarrow T_p\}$ . Soient  $V_0 = 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$  ces images. On notera que  $\dim V_n/V_{n-1} = r_G(p^n)$ . Comme  $V$  est  $\mathbf{F}_p C_s$ -module semi-simple, il en résulte que  $V$  est somme directe de sous  $\mathbf{F}_p C_s$ -modules  $U_n \cong V_n/V_{n-1}$  avec  $\dim U_n = r_G(p^n)$ . On a donc  $H_0(C_s, U_n) = 0$  et  $H_0(C_s, H_2U_n) = 0$  pour tout  $n$ .

Pour  $p = 2$  cela fournit immédiatement la condition (2).

Pour  $p = 3$ , on observe que si  $\dim U_m = \dim U_n = 1$  pour  $m \neq n$ , le générateur  $\tau = \sigma^q$  de  $C_s$  opère nécessairement par  $\tau(x) = -x$ , et le

produit tensoriel  $U_m \otimes U_n$  est sous-module trivial de  $H_2V$  ce qui contredit la condition  $H_0(C_s, H_2V) = 0$ .

Dans le cas où  $G$  n'est pas de type fini nous sommes loin de pouvoir faire une analyse complète et nous nous bornons à quelques remarques.

D'après un théorème de D. W. Sumners (Théorème 2.1 de [S]), tout  $\mathbf{Z}C$ -module parfait de génération finie  $G$  possède un sous-module  $G_0$  d'indice fini de la forme

$$G_0 \cong \mathbf{Z}C/(f_1) + \dots + \mathbf{Z}C/(f_r).$$

Comme  $G_0$  est évidemment parfait, on doit avoir  $f_i(1) = \pm 1$  pour tout  $i = 1, \dots, r$  et  $G_0$  est sans  $\mathbf{Z}$ -torsion.

Le  $\mathbf{Z}C$ -module  $G_0$  est lui-même sous-groupe dérivé de groupe de nœud.

En effet, si  $H_2G$  est un module parfait, il en est de même de  $H_2(G/T)$ , car le sous-module de  $\mathbf{Z}$ -torsion  $T$  d'un  $\mathbf{Z}C$ -module parfait de type fini est fini et donc  $\mathbf{Z}$ -facteur direct. L'inclusion  $G_0 \rightarrow G/T$  induit une injection  $H_2G_0 \rightarrow H_2(G/T)$ . Donc  $H_2G_0$  est parfait.

Enfin, il est facile de vérifier que si  $G$  admet une présentation  $H$ -dynamique finie est si  $G_0$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G$  invariant par l'action de  $H$ , alors  $G_0$  admet aussi une présentation  $H$ -dynamique finie. (On se ramène au cas classique en considérant  $G_0 \tilde{\times} H \rightarrow G \tilde{\times} H$ .)

PROPOSITION. *Le  $\mathbf{Z}C$ -module*

$$G_0 \cong \mathbf{Z}C/(f_1) + \dots + \mathbf{Z}C/(f_r)$$

*admet (comme groupe abélien) une présentation  $C$ -dynamique finie induisant l'action donnée de  $C$  sur  $G_0$  si et seulement si le produit  $f_1 \dots f_r$  a son terme dominant ou son terme constant égal à  $\pm 1$ .*

(Les éléments  $f_i \in \mathbf{Z}C$  sont supposés écrits comme polynômes de terme constant non-nul.)

*Exemple.* Si  $f_1 = z^2 + az + b$  et  $f_2 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ , le groupe  $G_0 = \mathbf{Z}C/(f_1) + \mathbf{Z}C/(f_2)$  avec l'action naturelle de  $C$  admet la présentation  $C$ -dynamique suivante:

Générateurs:

$$x_m, y_m \quad m \in \mathbf{Z},$$

représentant  $z^m$  dans le premier et deuxième facteur respectivement.

Relateurs:

$$\begin{aligned} & x_{m+2}x_{m+1}^a x_m^b, \quad y_{m+3}y_{m+2}^\alpha y_{m+1}^\beta y_m^\gamma \\ & [x_m, x_{m+1}], [y_m, y_{m+1}], [y_m, y_{m+2}] \\ & [x_{m+1}, y_m], [x_m, y_m], [x_m, y_{m+1}], [x_m, y_{m+2}] \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de traiter le cas général. La nécessité de la condition résulte du théorème C de [B.-S.].

Compte-tenu de la classification des groupes abéliens de rang 1, ceci donne:

Le seul groupe abélien de rang 1, sans  $\mathbf{Z}$ -torsion, qui se présente comme groupe dérivé d'un groupe de nœud est le groupe  $\mathbf{Z} [\frac{1}{2}]$ . L'automorphisme est alors nécessairement la multiplication par 2 (ou son inverse).

En rangs  $n \geq 2$ , on peut classer les modules  $G_0 = \mathbf{Z}C/(f)$  admissibles, où  $f = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  pour les petites valeurs de  $n$ .

La condition que  $G_0$  soit parfait donne

$$(1) \quad 1 + \sum_{i=1}^n a_i = \varepsilon. \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Pour le groupe  $H_0(C, H_2 G_0)$  on trouve la matrice de présentation (à  $n-1$  lignes et  $n-1$  colonnes):

$$X_f = \begin{bmatrix} a_n & & & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & \\ \dots & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ a_2 & \dots & & a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-3} & \dots & & & 1 \\ \dots & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

obtenue en substituant  $z = 1$  dans une matrice de présentation de  $A^2 G_0$  sur les  $\mathbf{Z}C$ -générateurs  $1 \wedge z, \dots, 1 \wedge z^{n-1}$ .

La condition  $H_0(C, H_2 G_0) = 0$  donne

$$(2) \quad \det X_f = \delta. \quad (\delta = \pm 1.)$$

Pour  $n = 2$ , on a  $X_f = (a_2 - 1)$ . On obtient le système

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 &= \varepsilon, \\ a_2 - 1 &= \delta. \end{aligned}$$

Seules solutions:  $a_1 = -4, -2$  et  $a_2 = 2$  qui donnent deux modules tous deux isomorphes à  $\mathbf{Z} [\frac{1}{2}] \oplus \mathbf{Z} [\frac{1}{2}]$  comme groupes abéliens.



Pour  $n = 3$ ,

$$X_f = \begin{bmatrix} a_3 - a_1 & -1 \\ a_2 - 1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que les seuls polynômes  $f = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$  tels que

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 + a_3 &= \varepsilon, \\ \det X_f &= \delta, \end{aligned}$$

sont ceux de la liste suivante:

$$\begin{aligned} z^3 - 2z^2 + (1 + \varepsilon)z + c(z-1)^2 & \text{ pour tout } c \in \mathbf{Z}, \\ z^3 + \varepsilon z - 1 + cz(z-1) & \text{ pour tout } c \in \mathbf{Z}. \\ z^3 - z + 1 \\ z^3 - 6z^2 + 8z - 2 \\ z^3 - 6z^2 + 9z - 3 \\ z^3 - 2z^2 + 2z - 2 \\ z^3 - 2z^2 - z + 1 \\ z^3 - 4z^2 + 5z - 3. \end{aligned}$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [B.-E.] BIERI, R. and B. ECKMANN. Groups with homological duality generalizing Poincaré duality. *Inventiones Math.* 20 (1973), pp. 103-124.
- [B.-S.] BIERI, R. and R. STREBEL. Almost finitely presented soluble groups. (*To appear in Comm. Math. Helv.*)
- [D] DWYER, W. Vanishing homology over nilpotent groups. *Proc. A.M.S.* 49 (1975), pp. 8-12.
- [K] KERVAIRE, M. Les nœuds de dimensions supérieures. *Bull. Soc. Math. France* 93 (1965), pp. 225-271.
- [L] LEVINE, J. Knot modules I. *Trans. AMS* 229 (1977), pp. 1-50.
- [L2] ——— Some result in higher dimensional knot groups. *Knots, Les-Plans-sur-Bex 1977, à paraître en Springer Lecture Notes.*
- [S] SUMNERS, D. W. Polynomial invariants and the integral homology of coverings of knots and links. *Inventiones Math.* 15 (1972), pp. 78-90.

(Reçu le 5 septembre 1977)

J. C. Hausmann  
M. Kervaire

Section de Mathématiques  
Case postale 124  
CH-1211 Genève 24