

§2. Groupes de nœuds

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(On notera que les relations $ux_i u^{-1} = vx_i v^{-1}$, si u et $v \in Z$ représentent le même élément de H , sont évidemment conséquences de $R_{s+1}, \dots, R_r$ qui définissent H .) Il en résulte que π admet la présentation $\pi = \langle x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n : R_1, \dots, R_r \rangle$, où $R_i = R_{i,e}^*$ pour $i = 1, \dots, s$.

§ 2. GROUPES DE NŒUDS

Il est maintenant facile de caractériser le sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud.

On note C le groupe cyclique infini de générateur z .

THÉORÈME 2. *Un groupe G est sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud, i.e. d'un groupe satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) de l'introduction, si et seulement si G admet une présentation C -dynamique finie avec automorphisme induit $\sigma: G \rightarrow G$ tel que*

(I) G est engendré par les éléments de la forme $x \cdot \sigma(x^{-1})$, $x \in G$;

(II) $H_2(G)$ est un $\mathbb{Z}C$ -module parfait, i.e. $\sigma_* - 1: H_2G \rightarrow H_2G$ est surjective.

Note. La condition (II) s'exprime homologiquement par $H_0(C, H_2G) = 0$. C'est sous cette forme que nous l'utiliserons.

Preuve. Soient π un groupe de nœud et $z \in \pi$ un élément dont la clôture normale est π tout entier. On a $\pi = G \tilde{\times} C$, où $G = [\pi, \pi]$ et C est infini cyclique engendré par z .

Comme π est de présentation finie, il résulte du théorème 1 que G possède une présentation C -dynamique finie avec automorphisme $\sigma: G \rightarrow G$ donné par $\sigma(x) = zxz^{-1}$.

On va voir que σ satisfait aux conditions (I) et (II) du théorème 2.

(I) Si $g \in G$, g est un produit de conjugués de z et z^{-1} , i.e. $g = \prod_i x_i z^{\varepsilon_i} x_i^{-1}$, $x_i \in \pi$, avec $\sum_i \varepsilon_i = 0$. Comme $x_i z x_i^{-1} = x_i z^a z z^{-a} x_i^{-1}$, on peut supposer $x_i \in G$ pour tout i . Or, avec $x \in G$, on a

$$xzx^{-1} = xzx^{-1}z^{-1}z = x \cdot \sigma(x^{-1}) \cdot z.$$

Il en résulte facilement que tout élément de G s'écrit comme produit d'éléments de la forme $x \cdot \sigma(x^{-1})$ et de leurs inverses.

(II) La suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'extension $1 \rightarrow G \rightarrow \pi \rightarrow C \rightarrow 1$, où $H_i(C, M) = 0$ pour $i \geq 2$ et pour tout $\mathbf{Z} C$ -module M , fournit la suite exacte

$$0 \rightarrow H_0(C, H_2 G) \rightarrow H_2(\pi) \rightarrow H_1(C, H_1 G) \rightarrow 0,$$

où $H_2 G$ est un $\mathbf{Z} C$ -module par l'action de C sur G définie plus haut. (Cette action dépend du choix de z mais on sait que l'action induite sur $H_*(G)$ ne dépend que de l'extension.)

Comme π est groupe de nœud, on a $H_2(\pi) = 0$, et ceci entraîne $H_0(C, H_2(G)) = 0$, ce qui équivaut à $H_2 G$ parfait.

Réciproquement, si G possède une présentation C -dynamique finie $\langle x_{1,a}, \dots, x_{m,a} : R_{1,b}, \dots, R_{n,b} \rangle$ satisfaisant aux conditions (I) et (II) du théorème 2, on obtient comme au § 1 une présentation finie de $\pi = G \tilde{\times} C$ de la forme

$$\pi = \langle x_1, \dots, x_m, z : R_1, \dots, R_n \rangle,$$

où $x_1, \dots, x_m$ représentent des éléments de G , z engendre C et l'automorphisme $\sigma : G \rightarrow G$ induit par la présentation dynamique est donné par $\sigma(x) = zxz^{-1}$.

Comme G est engendré par les éléments de la forme $x \cdot \sigma(x^{-1}) = xzx^{-1}z^{-1}$, il en résulte que π est la clôture normale de z , et aussi $G \subset [\pi, \pi]$.

Comme π s'envoie sur C avec noyau G , on a $G = [\pi, \pi]$ et $H_1(\pi) = \mathbf{Z}$. Il reste à vérifier que $H_2(\pi) = 0$.

La suite spectrale de l'extension $1 \rightarrow G \rightarrow \pi \rightarrow C \rightarrow 1$ fournit encore la suite exacte

$$0 \rightarrow H_0(C, H_2 G) \rightarrow H_2(\pi) \rightarrow H_1(C, H_1(G)) \rightarrow 0.$$

Mais $H_1(C, H_1(G)) = 0$ par un théorème de W. Dwyer [D], et la condition (II): $H_0(C, H_2(G)) = 0$ entraîne $H_2(\pi) = 0$.

Le groupe π satisfait donc aux trois conditions (1), (2), (3) de l'introduction.

Note. Le théorème de Dwyer est beaucoup plus général que le cas particulier considéré ci-dessus, et sa démonstration utilise d'ailleurs la démonstration directe de ce cas particulier.

Si M désigne le $\mathbf{Z} C$ -module $H_1(G)$, la condition (I) sur G implique que M est un $\mathbf{Z} C$ -module parfait, i.e. $\sigma - 1 : M \rightarrow M$ est surjective. D'autre part M est de génération finie sur $\mathbf{Z} C$ (finitude de la présentation

dynamique), et comme $\mathbb{Z}C$ est un anneau noethérien, il en résulte que $\sigma - 1 : M \rightarrow M$ est aussi injective. Or, la résolution $0 \rightarrow \mathbb{Z}C \xrightarrow{d} \mathbb{Z}C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, où $d(1) = z - 1$ montre que $H_1(C, M) = \text{Ker} \{ \sigma - 1 : M \rightarrow M \} = 0$.

L'assertion résulte aussi du fait que C est un groupe à dualité. (Cf. [B.-E.])

§ 3. EXEMPLES

Quels groupes abéliens peuvent être sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud ?

Dans ce paragraphe on dira qu'un automorphisme $\sigma : G \rightarrow G$ d'un groupe abélien G est *admissible* si $\sigma - 1 : G \rightarrow G$ et $\sigma - 1 : H_2G \rightarrow H_2G$ sont surjectifs.

Rappelons que H_2G et la deuxième puissance extérieure Λ^2G sont fonctoriellement isomorphes. En effet, si l'on définit H_2G par la formule $H_2G = R \cap [F, F]/[R, F]$, où $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$ est une présentation de G , alors $[F, F] \subset R$ pour G abélien et donc $H_2G = [F, F]/[R, F]$. On définit alors un isomorphisme $f : \Lambda^2G \rightarrow H_2G$ par la formule $f(g \wedge g') = [x, x'] \text{ mod } [R, F]$, où $x, x' \in F$ représentent $g, g' \in G$ respectivement.

La condition sur H_2G est donc équivalente (pour G abélien) à la surjectivité de $\Lambda^2\sigma - 1 : \Lambda^2G \rightarrow \Lambda^2G$.

Considérons d'abord les groupes abéliens de type fini.

Notations. Si G est abélien de type fini, on notera T son sous-groupe de torsion et $F = G/T$. On a $T = \bigoplus_p T_p$, p premier, où T_p est un p -groupe, et on notera

$r_G = \text{rang de } F$,

$r_G(p^n) = \text{nombre de facteurs isomorphes à } \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \text{ dans } T_p$.

THÉORÈME 3. *Un groupe abélien de type fini G se présente comme sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud si et seulement si*

- (1) $r_G \neq 1, 2$,
- (2) $r_G(2^n) \neq 1, 2$ pour tout n , et
- (3) $r_G(3^n)$ n'est égal à 1 que pour une valeur de n au plus.

Exemples. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ne sont pas des sous-groupes dérivés d'un groupe de nœud. Par contre J. Levine démontre que ces groupes