3. Teorema Fondamentale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

mente massimali, viceversa ad ideali massimali non corrisponde necessariamente una segnatura minimale. Un ideale principale $J = (ax^m + bx^{m-1} + \dots)$ ha segnatura del tipo $a_n = 0$ per ogni $n < m$, $a_n = a$ per ogni $n \geqslant m$ viceversa ad ogni segnatura di questo tipo corrispondono ideali principali.

3. Teorema Fondamentale

Def. 7. Data una sequenza di polinomi di $Z[x]$, chiamiamo *prolungamento multiplo* di tale sequenza l'insieme di infiniti polinomi ottenuti moltiplicando ciascuno dei polinomi dati per tutte le potenze intere non negative di x.

Il prolungamento multiplo di una sequenza di generatori di un ideale di $Z[x]$ genera l'ideale come Z-modulo.

Se $p_1, \dots, p_n$ è una sequenza di polinomi di $Z[x]$ allora il suo prolungamento multiplo si può pensare come una matrice di n righe e ω colonne nel modo seguente:

$$0, \dots, p_1, xp_1, x^2p_1, \dots, x^\kappa p_1, \dots$$
$$0, \dots, 0, 0, \dots, p_2, xp_2, x^2p_2, \dots$$
$$0, \dots 0, \dots, p_n, xp_n, x^2p_n, \dots$$

Ad ogni prolungamento multiplo resta ovviamente associato un insieme finito di segnature che chiameremo *multi segnatura*.

Nella dimostrazione del prossimo teorema ci servirà un semplice risultato di teoria degli insiemi, probabilmente noto, ma di cui non abbiamo trovato traccia nella letteratura consultata e che perciò riportiamo qui di seguito.

Dato un insieme S e una relazione binaria $<$ in S, definiamo una relazione binaria $<^*$, tra i sottoinsiemi finiti di S nel modo seguente: se A, B sono sottoinsiemi finiti di S, $A <^* B$ se e solo se esiste una applicazione suriettiva $f : B \to A$ tale che (i) $f(x) \leqslant x$ (per ogni $x \in B$) (ii) esiste almeno un $y \in B$ con $fy < y$.

Proposizione 1. *Se* $<$ *è fondata allora* $<^*$ *è fondata.*

Dim. Consideriamo una sequenza decrescente di elementi di S, sia essa $A_0 {}^*{>} A_1 {}^*{>} \dots {}^*{>} A_n {}^*{>} \dots$ Sia poi f_n una applicazione da A_n ad A_{n+1} con le proprietà suddette. Consideriamo le sequenze di elementi di S ottenute a partire dagli elementi di A_0 per successiva applicazione delle f_n.

Tali sequenze, ovviamente in numero finito, sono stazionarie per la fondatezza di $<$. Dunque anche la sequenza $(A_n)_{n\in\omega}$ è stazionaria.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema fondamentale.

TEOREMA 3. *Esiste procedimento effettivo che, dato un sistema finito di generatori per un ideale J di $Z[x]$, permette di trovare un sistema normale di generatori.*

Dim. Siano $p_1, p_2, ..., p_n$ generatori di J e $g_1 \leqslant g_2 \leqslant ... \leqslant g_n$ i gradi rispettivi. Scriviamo la matrice corrispondente al prolungamento multiplo di tale sistema di generatori. Se il primo polinomio non nullo di una qualunque riga, diciamo l'i-esima, è multiplo secondo una costante del corrispondente polinomio di un'altra riga allora ai fini della generazione dell'ideale come Z-modulo, l'i-esima riga è inutile. Il sistema di generatori ottenuto cancellando l'i-esima riga ha multisegnatura [1]) minore di quello di partenza. Dopo aver eliminato tutte le righe inutili col procedimento sopra descritto, si può ulteriormente passare ad un sistema di generatori con multisegnatura minore nel modo sottodescritto. Consideriamo la i-esima e la j-esima riga, senza perdere di generalità si può supporre $i < j$. Partendo dai polinomi p_i, p_j, con lo stesso procedimento impiegato nella dimostrazione del lemma 6 si possono costruire due polinomi r ed s, con grado di r uguale al grado di p_j, coefficiente direttivo di r minore del coefficiente direttivo di p_j, grado di s strettamente minore del grado di p_j. Se al posto della j-esima riga sostituisco la riga seguente

$$0, ..., s, xs, x^2s, ..., r, xr, x^2r, ...$$

il multisistema che ottengo genera J ed ha multisegnatura strettamente minore di quella di partenza. Dalla fondatezza di $<^*$ iterando il procedimento sopradescritto si perviene, in numero finito di passi, ad un sistema di polinomi ridotto a una sola riga, che genera J ed ha segnatura minimale; cioè ad un sistema del tipo

$$0, ..., q_1, xq_1, ..., q_2, xq_2, ..., q_\kappa, xq_\kappa, ...$$

La sequenza $q_1, q_2, ..., q_\kappa$ genera ovviamente J ed ha segnatura minimale, dunque per il lemma 5 è una sequenza normale. Infine sottraendo da

---

[1]) Ricordiamo che una multisegnatura è un sistema finito di segnature. Quindi nell'insieme delle multisegnature si può considerare una relazione binaria $<^*$ come quella definita prima della prop. 1; ed è appunto a questa relazione che ci riferiamo quando diciamo che una multisegnatura è minore di un'altra.

ciascun q_i una opportuna combinazione lineare di polinomi che lo precedono si può passare ad un sistema

$$0, \ldots, \bar{q}_{j_1}, x\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}, x\bar{q}_{j_n}, \ldots$$

che genera J e in cui la sequenza $\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}$ è ridotta. Quindi $\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}$ è il sistema normale cercato.

COROLLARIO 1. Esiste un procedimento effettivo che dati due ideali di $Z[x]$ mediante un loro qualunque sistema di generatori permette di confrontarli rispetto all'inclusione.

Dim. Siano $I = (p_1, \ldots, p_n)$, $J = (q_1, \ldots, q_r)$ gli ideali dati. Consideriamo l'ideale $K = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r)$. Dall'esame dei sistemi normali di generatori per I, J, K si arriva al confronto cercato.

COROLLARIO 2. Esiste un procedimento effettivo che, dati due ideali di $Z[x]$ mediante un loro qualunque sistema di generatori, permette di trovare un sistema normale di generatori per l'ideale prodotto.

COROLLARIO 3. Esiste un procedimento effettivo che, dato un ideale di $Z[x]$ mediante un qualunque sistema di generatori mi permette di riconoscere se è primo, massimale.

Dim. Immediato dal teorema e dalla caratterizzazione [1]) degli ideali primi e massimali di $Z[x]$.

L'argomento del presente lavoro si presta a diverse generalizzazione di cui di occuperemo in seguito; alcune di esse sono ovvie e avremmo potuto darle subito, ma abbiamo preferito per chiarezza fare l'esposizione nel caso di $Z[x]$.

NOTA

Quando il presente lavoro era già stato inviato per la pubblicazione ci è giunta notizia che F. Châtelet in [1] e G. Fardoux in [2] [3] hanno studiato rispettivamente sistemi di generatori per ideali di $\mathbf{Z}[x]$ e $A[x]$ (con A anello a ideali pricipali).

Le basi canoniche individuate dagli autori sopra citati hanno stretti legami con i nostri sistemi normali di generatori, pur non coincidendo. Più

---

[1]) Ci riferiamo alla caratterizzazione data a pag. 233 di I. R. Shafarevich: « Basic algebraic geometry », Berlin 1974.