

# III. RÉDUITE TRANSJORDANIENNE DE $f$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

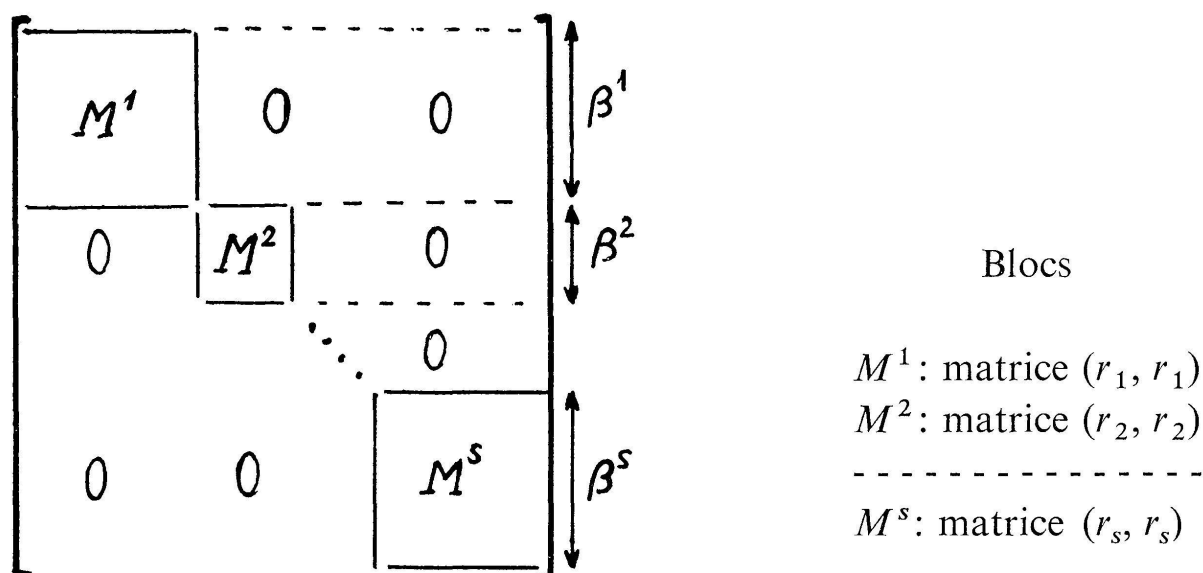
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### III. RÉDUITE TRANSJORDANIENNE DE $f$

A) Choix d'une première base de réduction.  $g_\nu$  applique  $K^\nu$  dans  $K^\nu$ . Donc  $f = g_\nu + \lambda_\nu e$  applique aussi  $K^\nu$  dans  $K^\nu$ . La matrice  $M$  traduisant  $f$  sur la base  $(\beta)$  précédente sera formée de *blocs diagonaux enchaînés* :



Tous les éléments hors des blocs sont nuls;  $\beta^\nu =$  base quelconque de  $K^\nu$ .

B) Construction de la réduite transjordanienne  $T$  de  $f$ . Le processus sera expliqué sur un exemple; on considère pour chaque  $\lambda_\nu$ , au lieu d'une base quelconque  $\beta^\nu$  de  $K^\nu$ , une « base hiérarchisée » de  $K^\nu$ . Pour simplifier les notations, l'indice  $\nu$  sera supprimé à l'occasion.

Supposons que pour la valeur propre  $(\lambda_\nu)$  on ait (pour  $g_\nu$ ):

les noyaux itérés  $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 = K^\nu$ ,  $(p=4)$ ,

leurs dimensions  $d_1 = 4, d_2 = 6, d_3 = 8, d_4 = 9 = d$ ,  $(d=r=9)$ ,

les sauts décroissants  $\delta_1 = 4, \delta_2 = 2, \delta_3 = 2, \delta_4 = 1$ .

Le choix des vecteurs de base va s'exercer en partant de  $K_4$  et remontant vers  $K_1$ ; ces vecteurs seront numérotés dans l'ordre inverse de leur choix.

1°) Prenons l'un quelconque  $S_4$  des supplémentaires de  $K_3$  dans  $K_4$ ,  $\dim S_4 = \delta_4 = 1$ . Dans  $S_4$  prenons une base formée d'un vecteur  $\varepsilon_9$ .

2°) On sait que  $g(S_4) \subset K_3$  et  $g(S_4) \cap K_2 = \{0\}$ . Par suite,  $K_2 + g(S_4) = K_2 \oplus g(S_4) \subset K_3$ . Or  $\dim [K_2 \oplus g(S_4)] = d_2 + \delta_4 < d_2 + \delta_3 = d_3$ . Cette inégalité établit que  $K_2 \oplus g(S_4)$  est un sous-espace strict de  $K_3$ . On choisit l'un quelconque  $\Omega$  des sous-espaces supplémentaires

de  $K_2 \oplus g(S_4)$  sur  $K_3$ ;  $\dim \Omega = d_3 - (d_2 + \delta_4) = \delta_3 - \delta_4 = 1$ .  $S_3 = g(S_4) \oplus \Omega$  est un sous-espace supplémentaire de  $K_2$  sur  $K_3$ .

$$\dim S_3 = \delta_4 + (\delta_3 - \delta_4) = \delta_3 = 2.$$

On prendra pour base de  $S_3$ :  $\{\varepsilon_8 = g(\varepsilon_9), \varepsilon_7 = \text{Base de } \Omega\}$ .

3<sup>o</sup>) On part de  $S_3$  et l'on forme  $g(S_3)$ ;  $\dim g(S_3) = \delta_3$  et  $g(S_3) \subset K_2$ ,  $g(S_3) \cap K_1 = \{0\}$ ,  $g(S_3) \oplus K_1 = \delta_3 + d_1 = \delta_2 + d_1 = d_2$ , car actuellement on a  $\delta_3 = \delta_2$ . Donc  $g(S_3)$  est un sous-espace supplémentaire  $g(S_3) = S_2$  de  $K_1$  sur  $K_2$ ;  $\delta_3 > \delta_4$  avait nécessité l'introduction d'un sous-espace  $\Omega$  pour obtenir  $S_3 = \Omega \oplus g(S_4)$ ; ici  $\delta_2 = \delta_3$  et directement  $S_2 = g(S_3)$ . On prendra comme base de  $S_2$  les deux vecteurs ( $\delta_2 = 2$ ):  $\varepsilon_6 = g(\varepsilon_8)$  et  $\varepsilon_5 = g(\varepsilon_7)$ .

4<sup>o</sup>)  $\dim g(S_2) = \dim S_2 = \delta_2 = 2$ ;  $g(S_2)$  est un sous-espace strict de  $K_1$ , lequel a pour dimension  $d_1 = \delta_1 = 4$ . Prenons l'un quelconque des supplémentaires  $\Omega'$  de  $g(S_2)$  sur  $K_1 (= S_1)$ ,  $\Omega' \oplus g(S_2) = K_1$ ,  $\dim \Omega' = \delta_1 - \delta_2 = 2$ .

Prenons comme base de  $K_1 = S_1$ :  $\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ , où  $\varepsilon_4 = g(\varepsilon_6)$ ,  $\varepsilon_3 = g(\varepsilon_5)$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  formant une base quelconque de  $\Omega'$ . Au total sur la base  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_8, \varepsilon_9\}$  l'application  $g_v$  de  $K^v$  dans  $K^v$  ( $g_v = f - \lambda_v e$ ) se traduira par le bloc  $T'^v$  dit bloc transjordanien. On déduira de  $T'^v$  le nouveau bloc transjordanien  $T^v$  traduisant sur la même base (base « canonique pour  $\lambda_v$  ») l'application  $f$  de  $K^v$  dans  $K^v$ . Le passage de  $T'^v$  à  $T^v$  se fera en remplaçant par  $\lambda_v$  les zéros de la diagonale principale de  $T'^v$ .

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc|cc} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right] \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{matrix} \left[ \begin{array}{cccc|cc|cc} \hline \lambda_v & 0 & 0 & 0 & & & & \\ \hline 0 & \lambda_v & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & \lambda_v & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_v & 0 & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_v & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_v & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_v & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_v \\ \hline \end{array} \right]$$

$$\leftarrow S_1 = K_1 \rightarrow \leftarrow S_2 \rightarrow \leftarrow S_3 \rightarrow \leftarrow S_4 \rightarrow$$

Matrice  $T'^v$  ( $g_v$  restreinte à  $K^v$ )

$$\leftarrow \delta_1 = d_1 \rightarrow \leftarrow \delta_2 \rightarrow \leftarrow \delta_3 \rightarrow \leftarrow \delta_4 \rightarrow$$

Matrice  $T^v$  ( $f$  restreinte à  $K^v$ )

Le processus indiqué est général. On construit dans l'ordre à partir de  $S_{p_v}$  supplémentaire arbitraire de  $K_{p_v-1}^v$  sur  $K_{p_v}^v$ .

*Exemples des deux types extrêmes de matrices transjordaniennes*

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|cc}
 \lambda_1 & & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 \hline
 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \\
 \hline
 & & & & \lambda_3 & 0 \\
 & & & & 0 & \lambda_3
 \end{array} \right]$$

$T'$

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|cc}
 \lambda_1 & & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 \hline
 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \\
 \hline
 & & & & \lambda_3 & 1 \\
 & & & & 0 & \lambda_3
 \end{array} \right]$$

$T''$

$T'$  = matrice diagonale  
 = réduite transjordanienne de  $f'$   
 $f'$  et  $f''$  ont le même spectre:

$T''$  = matrice « one by one step »  
 = réduite transjordanienne de  $f''$   
 $\{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3 \}$ .

Mais les profils sont

1°) pour  $f'$   $\{ d_1^1 = 1 = d_1 = r_1 \}$   
 $\{ d_1^2 = 4 = d_2 = r_2 \}$   
 $\{ d_1^3 = 2 = d_3 = r_3 \}$

Tous les indices = 1

2°) pour  $f''$   $\{ d_1^1 = d_1 = r_1 \}$   
 $\{ d_1^2 = 1, d_2^2 = 2, d_3^2 = 3, d_4^2 = 4 = d_2 = r_2 \}$   
 $\{ d_1^3 = 1, d_2^3 = 2 = d_3 = r_3 \}$ .

Tous les sauts = 1

*Remarque.* Si chaque valeur propre est racine simple de l'équation caractéristique

$$s = n \quad \text{ou} \quad r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1,$$

la transjordanienne est à la fois « diagonale » et « one by one step ».