

### 3. Formulation of Siegel's Theorem

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

of a compact set  $K$ . The right-hand side of the above formula reduces to the volume of  $K$ , while the left-hand side gives the mean value of

$$\text{card} (L - \{0\} \cap K),$$

as  $L$  varies over all  $\mathbf{Z}$ -lattices in  $\mathbf{R}^n$  with volume 1.

We turn now to the adelic mean value formula. Let  $G$  be a linear algebraic group defined over  $\mathbf{Q}$ , and let  $X$  be an algebraic homogeneous space for  $G$ , defined over  $\mathbf{Q}$ . For  $\xi \in X$ , let  $G_\xi = \{g \in G: g\xi = \xi\}$ . We assume that

- a)  $X$  has at least one rational point
- b) for any  $\xi \in X_{\mathbf{C}}$ , both  $G_{\mathbf{C}}$  and  $(G_\xi)_{\mathbf{C}}$  have finite fundamental groups
- c) for any extension field  $K$  of  $\mathbf{Q}$ ,  $G_K$  acts transitively on  $X_K$ .

We then have the following result.

**THEOREM (Ono [2]).** There are canonical measures on the adèle spaces  $G_A$  and  $X_A$  such that, given any continuous function  $\Phi$  on  $X_A$  with compact support,

$$(A) \quad \frac{\int_{G_A/G_{\mathbf{Q}}} \sum_{x \in X_{\mathbf{Q}}} \Phi(gx) dg}{\tau(G_\xi)} = \int_{X_A} \Phi(x) dx,$$

where  $\xi$  is any element of  $X_{\mathbf{Q}}$ , and  $\tau(G_\xi) =$  the invariant measure of  $(G_\xi)_A / (G_\xi)_{\mathbf{Q}}$ . The analogy to the previous mean value theorem is clear in the cases when  $\tau(G) = \tau(G_\xi)$ .

### 3. FORMULATION OF SIEGEL'S THEOREM

Let  $S$  and  $T$  be square matrices with integral entries of size  $m$  and  $n$ , respectively. We assume that both are positive definite. For any matrix  $x$ , denote  $S[x] = {}^t x S x$  (when defined). Let  $A(S, T) =$  the number of integral  $m \times n$  matrices  $x$  such that  $S[x] = T$ . For each positive integer  $q$ , let  $A_q(S, T) =$  the number of integral  $m \times n$  matrices  $x$ , mod  $q$ , such that  $S[x] \equiv T \pmod{q}$ .

A positive definite integral matrix  $S'$  is said to be in the same class as  $S$  if  $S' = S[U]$ , for some  $U \in SL(m, \mathbf{Z})$ .  $S'$  is in the same genus as  $S$  if for each  $q$ , there exists  $U \in SL(m, \mathbf{Z})$  such that  $S' \equiv S[U] \pmod{q}$ . Let  $S_1, \dots, S_h$  be the representatives of the classes in genus  $(S)$ . Let  $E(S_i) =$  the finite group consisting of all  $U \in SL(m, \mathbf{Z})$  such that  $S_i[U] = S_i$ , and put

$e_i = 1 / \# E(S_i)$ , where  $\#$  denotes cardinality. We now define the “number of representations of  $T$  by the genus of  $S$ ” as

$$A(\text{genus}(S), T) = \frac{e_1 A(S_1, T) + \dots + e_h A(S_h, T)}{e_1 + \dots + e_h}.$$

Now  $S$  is a real symmetric matrix, and so we may view it as a point in  $\mathbf{R}^{n_1}$ , where  $n_1 = n(n+1)/2$ . Similarly,  $T$  is a point in  $\mathbf{R}^{m_1}$ . Let  $dt$  be the usual measure in  $\mathbf{R}^{m_1}$ , and let  $dx$  be the usual measure in the real vector space of  $m \times n$  matrices. Given  $\varepsilon > 0$ , let  $B_\varepsilon$  denote the  $\varepsilon$ -neighborhood of  $T$  in  $\mathbf{R}^{m_1}$ , and let  $C_\varepsilon$  denote the set of  $x \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$  satisfying  $S[x] \in B_\varepsilon$ . Then  $B_\varepsilon$  and  $C_\varepsilon$  are open sets with compact closure, and the following limit is known to exist:

$$A_\infty(S, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} dx / \int_{B_\varepsilon} dt.$$

THEOREM (Siegel [4]). For  $m - n \geq 3$ ,

$$(S) \quad A(\text{genus}(S), T) = A_\infty(S, T) \lim_q \frac{A_q(S, T)}{q^{mn - (n+1)n/2}}.$$

#### 4. DERIVATION OF SIEGEL'S THEOREM

Let  $G = \{g \in SL(m) : S[g] = S\}$ , and let  $X = \{x \in M_{m \times n} : S[x] = T\}$ . If  $m \geq 4$ , both  $G_{\mathbf{C}}$  and  $G_{\mathbf{R}}$  have fundamental groups of order 2. Condition (c) of § 2 is the classical Witt theorem for  $(G, X)$ . We assume that  $X_{\mathbf{Q}}$  is nonempty.

We will show that (A) implies (S). This reduces Siegel's theorem to the computation of the Tamagawa number  $\tau(G)$ .

Let  $\Phi_\infty =$  the constant function 1 on  $X_{\mathbf{R}}$ , and let  $\Phi_p =$  the characteristic function of  $X_{\mathbf{Z}_p}$  in  $X_{\mathbf{Q}_p}$ . Then  $\Phi = \Phi_\infty \cdot \prod \Phi_p$  is the characteristic function of  $X_{S_\infty} = X_{\mathbf{R}} \cdot \prod X_{\mathbf{Z}_p}$  in  $X_A$ . Because of the positive definiteness of  $S$ ,  $\Phi$  has compact support.

Consider the right-hand side of formula (S). Siegel has shown that there exists an algebraic gauge form  $dx$  on  $X$  such that  $A_\infty(S, T) = \int_{X_{\mathbf{R}}} dx_\infty$ , and

$$\lim_q \frac{A_q(S, T)}{q^{mn - (n+1)n/2}} = \prod_p \int_{X_{\mathbf{Z}_p}} dx_p,$$

where  $dx$  and  $dx_p$  are the positive measures induced on  $X_{\mathbf{R}}$  and  $X_{\mathbf{Q}_p}$  by  $dx$ .