1. Applications génériques de PC^m dans PC^n

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

APPLICATIONS POLYNÔMIALES DE DEGRÉ DEUX DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE DANS LUI-MÊME

par Felice RONGA

Soit $f = (f_0, f_1, f_2)$ un triple de polynômes homogènes de degré deux à coefficients complexes et à trois variables z_0, z_1, z_2; s'ils n'ont d'autre racine commune que $0 \in \mathbf{C}^3$, ils déterminent une applications notée encore $f : P\,\mathbf{C}^2 \to P\,\mathbf{C}^2$. On se propose de classer ces application à des changements de coordonnées de la source et du but près. Il se trouve qu'elles sont essentiellement déterminées par leur lieu singulier, qui est soit une cubique non singulière, soit la réunion d'une conique et d'une droite en position générale, soit la réunion de trois droites en position générale. Dans le dernier cas il y a deux possibilités: aux trois points d'intersection des trois droites le noyau de la dérivée de f est soit partout de dimension deux, soit de dimension deux en l'un des points et de dimension un en les deux autres.

On dira que f et $g : P\,\mathbf{C}^2 \to P\,\mathbf{C}^2$ sont équivalentes si elles coïncident après changement de coordonnées à la source et au but, c'est à dire $f = H \,.\, g \,.\, h^{-1}$, où $H, h \in \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2)$. Au §4 on considère le groupe d'isotropie $G_f = \{(h, H) \in \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \times \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \,|\, f = \mathrm{H} \,.\, f \,.\, h^{-1}\}$. On montre que si $\dim\,(G_f) \geqslant 1$, f est stable dans les applications G_f-équivariantes; c'est à dire que si g est proche de f et invariante par l'action de G_f (soit $G_g \supset G_f$), g est équivalente à f.

Je remercie Pierre Siegfried pour les nombreuses conversations qui m'ont permis d'éclairer plusieurs points de ce travail.

1. APPLICATIONS GÉNÉRIQUES DE $P\mathbf{C}^m$ DANS $P\mathbf{C}^n$

Soit $A^d(m, n)$ l'ensemble des applications polynômiales de degré d de $P\mathbf{C}^m$ dans $P\mathbf{C}^n$; tout $f \in A^d(m, n)$ se met sous la forme:

$$f(z_0, \ldots, z_m) = (f_0(z_0, \ldots, z_m), \ldots, f_n(z_0, \ldots, z_m))$$

où f_i est un polynôme homogène de degré d. Le n-tuple $(f_0, \ldots, f_n)$ est déterminé à une constante non nulle près; f est bien définie à condition que $0 \in \mathbf{C}^{m+1}$ soit le seul zéro commun aux f_i. Puisque chaque f_i est déterminé par $\binom{d+m}{m}$ coefficients, $A^d(m, n)$ s'identifie à un ouvert de Zariski de $P\mathbf{C}^k$, où $k = (n+1) \cdot \binom{d+m}{m} - 1$; si $m > n$, A^d se réduit aux constantes.

Soit $S \subset J^r(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$ une sous-variété localement fermée (dans la topologie transcendante) du fibré des jets d'ordre r d'applications de $P\mathbf{C}^m$ dans $P\mathbf{C}^n$. Si $f : P\mathbf{C}^m \to P\mathbf{C}^n$, on dit que f est S-transverse si son extension aux jets d'ordre r $j^r(f) : P\mathbf{C}^m \to J^r(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$ est transverse à S.

1.1. PROPOSITION. *Soit* $S \subset J^r(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$ *une sous-variété localement fermée; si* $n \geqslant m$ *et* $d \geqslant r$, *l'ensemble des* $f \in A^d(m, n)$ *qui sont* S-*transverses est dense.*

La démonstration, qui suit le schéma habituel des théorèmes de transversalité, est précédée par un lemme:

1.2. LEMME. La dérivée de l'application $F : P\mathbf{C}^m \times A^d(m, n) \to J^d(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$, $F(z, g) = j^d(g)_{(z)}$, est surjective en tout point.

Démonstration: Soit B^d l'ensemble des $(n+1)$-uples $(f_0, \ldots, f_n)$ de polynômes homogènes de degré d en les variables $z_0, \ldots, z_m$; soit $U \subset B^d$ l'ouvert de Zariski formé des $(n+1)$-uples n'ayant d'autre racine commune que $0 \in \mathbf{C}^{m+1}$. Puisque $(z_0^d, \ldots, z_m^d, 0, \ldots, 0)$ est dans U, celui-ci est non vide, donc dense dans B^d. Désignons par P^d l'ensemble des applications polynômiales de degré au plus égal à d de $\mathbf{C}^m$ dans $\mathbf{C}^n$. Si $(z^0, g) \in P\mathbf{C}^m \times U$, on peut supposer sans perte de généralité que $z^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ et $g_0(z^0) \neq 0$. Pour montrer que la dérivée de F en (z^0, g) est surjective, il suffit de vérifier que l'application linéaire $G : B^d \to P^d$, $G(f) = (f_1(1, z'), \ldots, f_n(1, z'))$, où $z' = (z_1, \ldots, z_m)$, est surjective. Or si $q \in P^d$, $q = \left(\sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha^i \cdot z'^\alpha\right)_{i=1,\ldots,n}$ on pose $q_h(z_0, \ldots, z_m) = \left(z_0^d, \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha^1 \cdot z'^\alpha \cdot z_0^{d-|\alpha|}, \ldots, \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha^n \cdot z'^\alpha \cdot z_0^{d-|\alpha|}\right)$ et on a que $G(q_h) = q$.

Démonstration de 1.1: en remplaçant éventuellement S par son image inverse par la projection de $J^d(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$ sur $J^r(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$, on se ramène au cas où $d = r$. Soit alors $S' = F^{-1}(S)$ et $p : S' \to A^d$ la restriction de la projection de $P\mathbf{C}^m \times A^d$ sur le deuxième facteur. Si $f \in A^d$ est une valeur régulière de p, $j^d(f)$ est transverse à S. Le résultat suit alors du théorème de Sard.

Soit maintenant $f : PC^2 \to PC^2$ une application de degré $d \geqslant 2$; il suit de 1.1 qu'en déformant arbitrairement peu f on peut la rendre générique pour les singularités de Boardman d'ordre deux: on dira alors que f est « générique ». Si f est donc générique, ses seules singularités sont $\sum^1 (f) = \{z \in PC^2 \mid \dim(\ker(df_z)) = 1\}$, qui est une courbe régulière, et $\sum^{1,1}(f) = \{z \in PC^2 \mid \ker(df_z) = T_z(\sum^1(f))\}$, qui est un ensemble fini de points (T_z désigne l'espace tangent au point z).

1.3. Proposition. *Soit* $f : PC^2 \to PC^2$ *une application générique de degré* d. *Alors* $\sum^1(f)$ *est une courbe régulière de degré* $3.(d-1)$ *et* $\sum^{1,1}(f)$ *est constitué de* $3.(4d-5).(d-1)$ *points.*

Démonstration: Soit $s \in H^2(PC^2)$ la classe d'Euler du fibré canonique et désignons par $N(f) = f^*(T(PC^2)) - T(PC^2)$ le fibré virtuel normal à f. On a que $c(T(PC^2)) = 1 + 3s + 3s^2$, où c désigne la classe de Chern totale, et $f^*(s) = d.s$. La classe duale à $\sum^1(f)$ est égale à

$$(*) \quad c_1(N(f)) = f^*(3s) - 3s = 3(d-1).s\,.$$

La classe duale à $\sum^{1,1}(f)$ est égale à

$$(**) \quad c_1^2(N(f)) + c_2(N(f)) = 3(d-1)(4d-5).s^2\,.$$

L'expression de ces classes duales est calculée par exemple dans [1]. On obtient les formules cherchées en évaluant (*) et (**) respectivement sur la classe fondamentale d'un hyperplan et sur la classe fondamentale de PC^2, ce qui revient à remplacer s par 1.

En fait, on se convainc facilement que pour toute application f de degré d le lieu singulier, qu'on désignera dorénavant par $\sum(f)$, a pour équation: $\text{dét}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=0,1,2} = 0$, ce qui définit bien une courbe de degré $3(d-1)$.

2. Une coïncidence

On se borne dorénavant aux applications de degré deux de PC^2 dans PC^2; l'ensemble $A^2(2,2)$ de ces applications est un ouvert de Zariski de PC^{17}, sur lequel opère $P(Gl(3,\mathbf{C})) \times P(Gl(3,\mathbf{C}))$, qui est de dimension 16; l'orbite générique a donc une codimension au moins égale à un. Le lieu singulier d'une telle application est une cubique; l'ensemble des cubiques de PC^2 s'identifie à PC^9. Si l'on fait agir $P(GL(3,\mathbf{C}))$ sur ces cubiques, l'orbite générique est de codimension un. On peut donc s'attendre