

## 2. Continued Fractions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

integers  $x$  and  $y$ . Now suppose the existing primes are  $p_1, p_2, \dots, p_t$  with  $p_t \geq 5$ . Write

$$\sum_{i=2}^t \frac{1}{p_i} = \frac{m}{n}$$

where

$$m = p_2 p_3 \dots p_t + p_1 p_3 \dots p_t + \dots + p_1 p_2 \dots p_{t-1}$$

and  $n = p_1 p_2 \dots p_t$ . Now  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > 1$  so that  $\frac{m}{n} > 1$ . Moreover  $m > n$ , so that  $m > 1$  and thus  $m$  has a prime factor  $p_i$ . This implies

$$p_i \mid p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_t$$

and again we have a contradiction.

In the present note we indicate how the theory of simple continued fractions can be used to give a new proof that there exist infinitely many primes. The proof is an application of the theory of periodic continued fractions and the theory of the Pellian equation.

## 2. CONTINUED FRACTIONS

The necessary material can be found in Perron [3]. We denote the numerators and denominators of the approximants to the simple continued fraction

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

by  $A_m$  and  $B_m$  respectively for  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Thus  $A_0 = a_0$ ,  $A_1 = a_0 a_1 + 1$ ,  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = a_1$  and for  $m \geq 1$  we have

$$(1) \quad B_{m+1} = a_{m+1} B_m + B_{m-1}.$$

The limit of every infinite periodic simple continued fraction is a quadratic irrational. In particular, if  $p$  is a positive integer and

$$x = p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \dots}}$$

then we have

$$(2) \quad x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}.$$

Suppose  $d$  is a positive integer which is not the square of an integer. The Diophantine equation

$$(3) \quad x^2 - dy^2 = -1$$

is often called the non-Pellian equation. If the simple continued fraction for  $\sqrt{d}$ , which is necessarily periodic, has a period consisting of an odd number,  $m$ , of terms, then (3) has a solution. In this case every positive solution is of the form  $x = A_i, y = B_i$ , for  $i = qm - 1$  with  $q$  odd.

### 3. THE BASIC RESULT

We use the above results to establish the THEOREM. There exist infinitely many primes.

*Proof.* Assume that there are only finitely many primes  $p_1, p_2, \dots, p_t$  where  $p_1 = 2$ . Let  $p = \prod_{i=1}^t p_i$  and  $q = \prod_{i=2}^t p_i$  so that  $q$  is the product of the odd primes, and hence  $q > 1$ . Define  $x$  by (2). Then in terms of  $q$  we have

$$x = q + \sqrt{q^2 + 1}.$$

Since  $q^2 + 1 > 1$  and  $p_i \nmid (q^2 + 1)$  for  $i = 2, 3, \dots, t$  it follows that  $q^2 + 1$  is a power of 2 since 2 is the only remaining prime. Moreover,  $q^2 + 1$  must be an odd power of 2 since  $x$  is irrational. Thus  $q^2 + 1 = 2^{2l+1}$  or

$$q^2 - 2(2^l)^2 = -1$$

and it follows that the non-Pellian equation

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

have a solution  $x = q, y = 2^l$ . Hence  $\frac{q}{2^l}$  is an even approximant to the continued fraction for  $\sqrt{2}$ . We have

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

and using (1) we easily verify by induction, for this particular continued