Classification des courbes différentielles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

APPENDICE IV

Classification des courbes différentielles

Soit X une courbe différentielle (paracompacte) connexe. On munit le fibré cotangent Ω^1 d'une structure hermitienne (chap. 0, § 2, lemme 3). On dit qu'une carte ϕ de X est *normalisée* si son domaine U est connexe et si le vecteur $d\phi\,(x)$ est de longueur 1 pour tout point x de U. On laisse au lecteur le soin de démontrer qu'il existe de telles cartes.

Soient ϕ et ψ deux cartes normalisées de X de domaines respectifs U et V. Le changement de cartes γ de ϕ dans ψ est une application de $\phi\,(U \cap V)$ dans $\psi\,(U \cap V)$ dont la dérivée est localement constante, égale à plus ou moins 1. Les ensembles $\phi\,(U)$ et $\psi\,(V)$ sont des segments ouverts de $\mathbf{R}$ que l'on désigne par I et J.

LEMME 1. *Supposons l'ensemble $U \cap V$ non vide. Alors $U \cap V$ contient au plus deux composantes connexes. S'il contient une composante connexe, l'ensemble $U \cup V$ est le domaine d'une carte normalisée de X. S'il contient deux composantes connexes, la variété X est isomorphe à* $\mathbf{U}$.

L'ensemble A défini par

$$A = \{(s, t) \in I \times J \mid \phi^{-1}(s) = \psi^{-1}(t)\}$$

est une sous-variété fermée de $I \times J$ isomorphe à $U \cap V$, formée de segments de droites parallèles à l'une des diagonales de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Les extrémités de ces segments appartiennent au bord de $I \times J$. Il est clair que chaque côté de $I \times J$ contient au plus une de ces extrémités (ce qui démontre la première assertion) et que ces segments sont simultanément parallèles à la diagonale ou à l'antidiagonale de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Si A est connexe, l'application γ se prolonge en une application linéaire f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Les applications $f \cdot \phi$ et ψ coïncident sur $U \cap V$. Par recollement, elles fournissent la carte cherchée.

Si A contient deux composantes connexes, que l'on suppose parallèles à la diagonale de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, il existe des nombres réels

$$a_1 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < a_2 \qquad \text{et} \qquad b_1 < \beta_1 \leqslant \beta_2 < b_2$$

tels que

$$I =]a_1, a_2[\qquad \text{et} \qquad J =]b_1, b_2[$$

et tels que les extrémités de A soient les points (a_1, β_2), (α_1, b_2), (α_2, b_1), (a_2, β_1). Quitte à translater J, on peut supposer que l'on a

$$b_1 = \alpha_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 = a_2$$

On vérifie aisément que l'application h de X dans $\mathbf{U}$ définie par

$$\begin{cases} h(x) = \exp\left(2i\pi \dfrac{\phi(x)}{\beta_2 - a_1}\right) & \text{si } x \in U \\ h(x) = \exp\left(2i\pi \dfrac{\psi(x)}{\beta_2 - a_1}\right) & \text{si } x \in V \end{cases}$$

est un difféomorphisme.

THÉORÈME 1. *Toute courbe différentielle connexe (dénombrable à l'infini) est isomorphe à* **R** *ou à* **U**.

Désignons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des cartes normalisées de X, ordonné par la relation de prolongement. Cet ensemble est inductif et non vide. Le lemme de Zorn montre qu'il contient un élément maximal ϕ. Raisonnons par l'absurde en supposant que X n'est isomorphe ni à **R** ni à **U**. En particulier, le domaine U de ϕ est distinct de X (sinon X serait isomorphe à un segment ouvert de **R**). Soit x un point de ∂U et soit ψ une carte normalisée de X dont le domaine V contient x. Il résulte du lemme 1 que $U \cup V$ est le domaine d'une carte normalisée de X ce qui contredit le caractère maximal de ϕ.