

(1) Résultats et discriminants

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

APPENDICE III

(1) Résultants et discriminants

Désignons par A un anneau intègre (commutatif avec élément unité) et par K son corps des fractions.

LEMME 1. Soit M un A -module libre de type fini et soit u un endomorphisme de M . Si u est surjectif, c'est un isomorphisme.

L'application $u \otimes 1$ est un endomorphisme surjectif de $M \otimes_A K$, donc un isomorphisme puisque $M \otimes_A K$ est un espace vectoriel de dimension finie. On conclut en remarquant que l'application canonique de M dans $M \otimes_A K$ est injective.

Pour tout entier naturel m , on désigne par A_m l'ensemble des polynômes de $A[T]$ de degré strictement inférieur à m . C'est un A -module libre de rang m .

Soient p et q deux polynômes de $A[T]$ de degré m et n respectivement. On désigne par $\phi(p, q)$ l'application A -linéaire de $A_n \times A_m$ dans A_{m+n} définie par

$$\phi(p, q)(u, v) = up + vq.$$

Les polynômes

$$(1, 0), \dots, (T^{n-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, T^{m-1}) \quad (\text{resp. } 1, \dots, T^{m+n-1})$$

forment une base de $A_n \times A_m$ (resp. A_{m+n}). On appelle *résultant de p et q* et l'on désigne par $\text{Rés}(p, q)$ le déterminant de l'application $\phi(p, q)$ exprimé dans ces bases. Si l'on pose

$$p = p_m + p_{m-1}T + \dots + p_0T^m \quad \text{et} \quad q = q_n + q_{n-1}T + \dots + q_0T^n$$

le résultant de p et q est donné par la formule

$$\text{Rés}(p, q) = \left| \begin{array}{ccccccccc} p_m & 0 & . & . & 0 & q_n & . & 0 & 0 \\ . & p_m & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & q_n & . \\ . & . & . & . & 0 & . & . & . & q_n \\ p_0 & . & . & . & p_m & . & . & . & . \\ 0 & p_0 & . & . & . & q_0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & q_0 & . \\ 0 & 0 & . & . & p_0 & 0 & . & 0 & q_0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m+1 \\ \\ \\ n-1 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_m$

Il résulte de cette définition que $\text{Rés}(p, q)$ est un polynôme homogène de degré n en $p_0, \dots, p_m$, homogène de degré m en $q_0, \dots, q_n$. Son terme de plus haut degré en p_m et q_0 est $p_m^n q_0^m$.

Pour tout homomorphisme ρ de A dans un anneau intègre B , on a

$$\text{Rés}(\rho(p), \rho(q)) = \rho(\text{Rés}(p, q)).$$

On dit que p et q sont *étrangers* (ou aussi *premiers entre eux*) s'ils engendrent l'anneau $A[T]$.

LEMME 2. On suppose que l'un au moins des coefficients p_0 ou q_0 est inversible. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Les polynômes p et q sont étrangers.
- (2) L'application $\phi(p, q)$ est un isomorphisme.
- (3) Le résultant de p et q est inversible dans A .

Il suffit de montrer que les conditions (1) et (2) sont équivalentes.

Supposons par exemple q_0 inversible et (1) vérifiée. En particulier, pour tout polynôme r de A_{m+n} , on a

$$r = up + vq$$

avec u et v dans $A[T]$. La division euclidienne des polynômes montre que l'on a

$$u = u'q + u'' \quad \text{avec} \quad \deg(u'') < n.$$

On a alors

$$r = u''p + (u' + v)q \quad \text{avec} \quad \deg(u' + v) < m.$$

Ceci montre que l'application $\phi(p, q)$ est surjective. Le lemme 1 montre que c'est un isomorphisme.

Réciproquement, supposons (2) vérifiée. On peut écrire

$$1 = up + vq$$

pour certains polynômes u et v de A_n et A_m respectivement. Ceci montre que p et q sont étrangers.

LEMME 3. *Supposons A factoriel. Si les polynômes p et q sont moniques, irréductibles et distincts, ils sont étrangers.*

Raisonnons par l'absurde. Il existe alors des polynômes u et v non nuls de degré strictement inférieur à n et m respectivement tels que

$$up + vq = 0$$

(lemme 2). Le polynôme q étant irréductible, il n'appartient pas à l'idéal (p) . Le polynôme v non plus pour des raisons de degré. Puisque $A[T]$ est factoriel et le polynôme p irréductible, l'idéal (p) est premier, ce qui est absurde.

Soit L une clôture algébrique de K . On peut écrire

$$p = p_0 \prod_{1 \leq j \leq m} (T - \alpha_j) \quad \text{et} \quad q = q_0 \prod_{1 \leq k \leq n} (T - \beta_k)$$

pour certains éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ de L . La fonction

$$S = p_0^n q_0^m \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (\beta_k - \alpha_j)$$

est symétrique par rapport à $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (resp. $\beta_1, \dots, \beta_n$). C'est donc une fonction polynomiale de $p_0, \dots, p_m$ et $q_0, \dots, q_n$. Remarquons que l'on a

$$S = (-1)^{mn} p_0^n \prod_{1 \leq j \leq m} q(\alpha_j) = q_0^m \prod_{1 \leq k \leq n} p(\beta_k).$$

En particulier, le polynôme S est homogène de degré n en $p_0, \dots, p_m$ et homogène de degré m en $q_0, \dots, q_n$. Son terme de plus haut degré en p_m et q_0 est $p_m^n q_0^m$.

Les coefficients des polynômes p et q sont liés aux racines par les formules

$$p_j = (-1)^j \sigma_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad \text{et} \quad q_j = (-1)^j \sigma_j(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

où σ_j désigne la j^e fonction symétrique élémentaire à m ou n indéterminées. Ceci montre que $\text{Rés}(p, q)$ est une fonction polynomiale en $p_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, q_0, \beta_1, \dots, \beta_n$. Cette fonction polynomiale est divisible par $\beta_k - \alpha_j$. En effet, si α_j est égal à β_k , les polynômes p et q ne sont pas étrangers (lemme 2).

Il résulte de toutes ces remarques que l'on a la formule

$$\text{Rés}(p, q) = p_0^n q_0^m \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (\beta_k - \alpha_j)$$

En particulier, le résultant de p et q s'annule si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- (1) L'un des coefficients p_0 ou q_0 est nul.
- (2) Les polynômes p et q ont une racine commune dans L .

Soit p un polynôme de $A[T]$ et soit p' le polynôme dérivé $\frac{\partial p}{\partial T}$. On appelle *discriminant de p* et l'on désigne par $\text{Dis}(p)$ le résultant de p et p' . Avec les notations précédentes, on a

$$p' = p_0 \sum_{1 \leq j \leq m} (T - \alpha_1) \dots (T - \alpha_j) \dots (T - \alpha_m)$$

et par conséquent,

$$p'(\alpha_k) = p_0 \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq k}} (\alpha_k - \alpha_j).$$

La formule précédente montre que l'on a

$$\text{Dis}(p) = p_0^{2m-1} \prod_{\substack{1 \leq j, k \leq m \\ j \neq k}} (\alpha_j - \alpha_k)$$

En particulier, le discriminant de p s'annule si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- (1) Le coefficient dominant de p est nul.
- (2) Le polynôme p a une racine double dans L .

LEMME 4. *Supposons A factoriel. Si le polynôme p est monique irréductible, le discriminant $\text{Dis}(p)$ est non nul.*

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\text{Dis}(p)$ est nul, donc non inversible dans K . Le lemme 2 montre qu'il existe deux polynômes u et v de degré strictement inférieur à $m-1$ et m respectivement dans $K[T]$ tels que

$$up + vp' = 0.$$

Quitte à multiplier cette égalité par un élément convenable de A , on peut supposer que u et v appartiennent à $A[T]$. On procède alors comme dans le lemme 3.