§6. Formes automorphes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Corollaire 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$ est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes.*

Désignons par $\underline{a}$ l'idéal des polynômes de $\mathbf{C}\,[T_0, ..., T_n]$ qui s'annulent sur $\psi^{-1}\,(X)$, où ψ est la projection canonique de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n$, et par Y le lieu des zéros de $\underline{a}$ dans $\mathbf{P}^n$. Puisque $\psi^{-1}\,(X)$ est connexe, l'idéal $\underline{a}$ est premier. Le corps $\kappa\,(Y)$ des fonctions rationnelles sur Y est un sous-corps de $\mathscr{K}\,(X)$. Le théorème 1 montre alors que Y est une courbe algébrique de $\mathbf{P}^n$. Désignons par Y_0 l'ensemble des points réguliers de Y et posons

$$X_0 = Y_0 \cap X\,.$$

L'ensemble X_0 est à la fois ouvert et fermé dans Y_0. Comme ce dernier ensemble est connexe (chap. I, § 5, théorème 4), on en déduit que X est égal à Y, d'où l'assertion.

Théorème 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X se plonge dans* $\mathbf{P}^3$.

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X. On désigne par y une valeur régulière de f, par $x_1, ..., x_r$ les points de $f^{-1}\,(y)$, par $x_{r+1}, ..., x_n$ les points critiques de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points $x_1, ..., x_r$ et possédant un zéro simple aux points $x_{r+1}, ..., x_n$ (lemme 1). Désignons par π l'application $(f{:}g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ et par Y son image. L'application π est partout de rang 1 et le couple (X, π) est une normalisation de Y (théorème 1). Soit A l'ensemble des points singuliers de Y et soit h une fonction méromorphe sur X séparant les points de $\pi^{-1}\,(A)$ (lemme 1). On montre aisément que l'application $(f{:}g{:}h)$ est un plongement de X dans $\mathbf{P}^3$.

§ 6. Formes automorphes

Pour tout automorphisme γ du disque unité $\mathbf{D}$, on définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}$ en posant

$$j_\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z}\,.$$

Pour tout couple (γ, γ') d'automorphismes et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$j_{\gamma'\gamma}(z) = j_{\gamma'}(\gamma z)\,j_\gamma(z)\,.$$

Nous supposerons désormais que X est le quotient de $\mathbf{D}$ par un groupe proprement discontinu Γ (chap. I, § 5, numéro 3) et nous désignerons par π la projection canonique de $\mathbf{D}$ dans X.

Soit m un entier relatif. On appelle *forme automorphe de poids m relative à Γ* toute fonction méromorphe f sur $\mathbf{D}$ telle que

$$f \cdot \gamma = j_\gamma^{-m} f$$

pour tout automorphisme γ de Γ. On désigne par $\mathscr{K}(m, \Gamma)$ (resp. $\mathscr{O}(m, \Gamma)$) l'ensemble des formes automorphes (resp. des formes automorphes holomorphes) de poids m relatives à Γ.

Fixons une fois pour toutes une forme différentielle méromorphe non nulle ω sur X. La forme différentielle $\pi^*(\omega)$ s'écrit

$$\pi^*(\omega) = f\,dz$$

où f est une fonction méromorphe sur $\mathbf{D}$. Pour tout automorphisme γ de Γ et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$f(z)\,dz = \pi^*(\omega)(z) = \pi^*(\omega)(\gamma z) = f(\gamma z)\,j_\gamma(z)\,dz$$

ce qui montre que f est une forme automorphe de poids 1 relative à Γ.

Pour toute forme automorphe u de poids m relative à Γ, la fonction méromorphe uf^{-m} est Γ-invariante. On en déduit que l'application Ψ_m de $\mathscr{K}(X)$ dans $\mathscr{K}(m, \Gamma)$ définie par

$$\Psi_m(v) = (v \cdot \pi) f^m$$

est un isomorphisme pour tout entier m.

Nous allons chercher à quelles conditions une fonction méromorphe v sur X fournit une forme automorphe holomorphe sur $\mathbf{D}$.

Pour une telle fonction, on a

$$0_z(\Psi_m(v)) = 0_z(\pi^*(v)) + m\,0_z(\pi^*(\omega)) \geqslant 0$$

pour tout point z de $\mathbf{D}$. Cette condition équivaut à

$$0_x(v) \geqslant -m\,0_x(\omega) - \left[m\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right] \quad {}^{1})$$

pour tout point x de X, où ρ_x désigne le cardinal du groupe d'isotropie de Γ en tout point de $\pi^{-1}(x)$. On définit un diviseur a_m sur X en posant

---

[1]) Pour tout nombre réel c, on désigne par $[c]$ la partie entière de c, i.e. l'entier relatif défini par

$$[c] = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant c\}.$$

$$a_m(x) = \left(m\,0_x(\omega) + \left[m\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right]\right) x\,.$$

On voit donc que Ψ_m induit un isomorphisme de $L(a_m)$ sur $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ (§ 3, remarque 1).

Pour toute fonction holomorphe u sur $\mathbf{D}$ et pour tout entier relatif m, la série

$$p_\Gamma(u, m) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (u \cdot \gamma) j_\gamma^m$$

s'appelle la *série de Poincaré associée à* u.

Lemme 1. *Si* u *est bornée et* m *au moins égal à* 2, *la série de Poincaré* $p_\Gamma(u, m)$ *converge uniformément sur tout compact vers une fonction de* $\mathcal{O}(m, \Gamma)$.

Pour montrer que la série $p_\Gamma(u, m)$ converge, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} j_\gamma^2$$

converge dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4). Désignons par z un point de $\mathbf{D}$ et par K un voisinage compact de z dans $\mathbf{D}$ tel que

$$\begin{cases} \gamma K = K & \text{si } \gamma \in \Gamma_z \\ \gamma K \cap K = \varnothing & \text{si } \gamma \notin \Gamma_z \end{cases}$$

(chap. I, § 5, lemme 3). La formule du changement de variable dans les intégrales doubles montre que l'on a

$$\| j_\gamma^2 \|_{L^1, K} = \int_K | j_\gamma |^2 \, d\mu = \mu(\gamma K)\,,$$

et par conséquent

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \| j_\gamma^2 \|_{L^1, K} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma K) = \operatorname{Card}(\Gamma_z)\Big(\sum_{\gamma \in \Gamma_0} \mu(\gamma K)\Big)$$

en désignant par Γ_0 un système de représentants de Γ/Γ_z. Ceci démontre l'assertion puisque les ensembles $(\gamma K)_{\gamma \in \Gamma_0}$ sont deux à deux disjoints et contenus dans $\mathbf{D}$.

Montrons maintenant que $p_\Gamma(u, m)$ est une fonction automorphe de poids m. Pour tout automorphisme γ de Γ et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$\begin{aligned} p_\Gamma(u, m)(\gamma z) &= \sum_{\gamma' \in \Gamma} u(\gamma' \gamma z) j_{\gamma'}^m(\gamma z) = j_\gamma^{-m}(z) \sum_{\gamma' \in \Gamma} u(\gamma' \gamma z) j_{\gamma' \gamma}^m(z) \\ &= j_\gamma^{-m}(z)\, p_\Gamma(u, m)(z) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

LEMME 2. *Pour m suffisamment grand, l'espace vectoriel $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ est de dimension au moins* 2.

On désigne par z_0 un point de $\mathbf{D}$ qui n'est pas un point fixe de Γ (i.e. un point régulier de l'application π) et par K un voisinage compact de z_0 tel que

$$\gamma K \cap K = \varnothing$$

pour tout automorphisme de Γ différent de l'identité.

Le lemme 1 montre qu'il existe un nombre fini d'automorphismes $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ de Γ, différents de l'identité tels que

$$\| j_\gamma \|^2_{L^\infty, K} \leqslant \frac{1}{2}$$

pour tout automorphisme γ de $\Gamma \backslash \{1, \gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$. On pose

$$z_\nu = \gamma_\nu (z_0)$$

pour tout entier ν compris entre 1 et p. Soit u une fonction holomorphe bornée sur $\mathbf{D}$. Pour tout entier m au moins égal à 2, on peut écrire

$$p_\Gamma(u, m) - u - \sum_{1 \leqq \nu \leqq p} (u \cdot \gamma_\nu) j^m_{\gamma_\nu} = \sum_{\gamma \in \Gamma'} (u \cdot \gamma) j^m_\gamma$$

où l'on a posé

$$\Gamma' = \Gamma \backslash \{ 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_p \} .$$

Sur le compact K on a donc

$$\| p_\Gamma(u, m) - u - \sum_{1 \leqq \nu \leqq p} (u \cdot \gamma_\nu) j^m_{\gamma_\nu} \|_{L^\infty, K}$$
$$\leqslant 2^{-m+2} \| u \|_{L^\infty, \mathbf{D}} \sum_{\gamma \in \Gamma'} \| j_\gamma \|^2_{L^\infty, K} .$$

Le membre de droite converge vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Supposons que u possède un zéro d'ordre au moins 2 en chaque point $z_1, \ldots, z_p$. Pour tout nombre réel ε strictement positif et pour tout entier m suffisamment grand, on a

$$| p_\Gamma(u, m)(z_0) - u(z_0) | \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial p_\Gamma(u, m)}{\partial z}(z_0) - \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) \right| \leqslant \varepsilon$$

(inégalités de Cauchy). Comme $u(z_0)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial z}(z_0)$ sont arbitraires, ceci démontre l'assertion.

LEMME 3. *Désignons par* g *le genre de* X. *Le nombre réel*

$$2g - 2 + \sum_{x \in X} \left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)$$

est strictement positif.

Désignons par m un entier suffisamment grand pour vérifier les conditions suivantes:

(1) L'espace vectoriel $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ est de dimension au moins 2.

(2) Pour tout point x de X, l'entier ρ_x divise m.

Désignons par π_m un fibré en droites holomorphe associé au diviseur a_m. Pour toute section holomorphe non nulle v de π_m, on a

$$\operatorname{ch}(\pi_m) = 0(a_m) = 0(v) \geqslant 0.$$

Si l'ordre de a_m est nul, le fibré π_m est trivial ce qui contredit (1). Il est donc strictement positif et la condition (2) montre que l'on a

$$0(a_m) = m\left(0(\omega) + \sum_{x \in X}\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right)$$

ce qui démontre l'assertion (§ 3, théorème 1, corollaire).

THÉORÈME 1. *Pour tout entier* m *au moins égal à* 2, *on a la relation*

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}(m, \Gamma) = (2m-1)(g-1) + \sum_{x \in X} \left[m\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right]$$

où g *désigne le genre de* X.

D'après la proposition 2 du paragraphe 3, il suffit de montrer que l'ordre de a_m est strictement supérieur à $2g-2$.

Tout d'abord, pour tout couple (m, l) d'entiers strictement positifs, on a

$$\left[m\left(1 - \frac{1}{l}\right)\right] \geqslant (m-1)\left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

En effet, on peut écrire

$$m = ql + r$$

où q et r sont des entiers naturels tels que r soit compris entre 0 et $l - 1$. Si r est nul, on a

$$\left[m\left(1 - \frac{1}{l}\right)\right] = m\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

Sinon q est au plus égal à $\dfrac{m-1}{l}$ et l'on a

$$\left[m\left(1-\frac{1}{l}\right)\right] = m - q - 1 \geqslant m - 1 - \frac{m-1}{l} = (m-1)\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

ce qui établit l'assertion.

On en déduit que

$$\begin{aligned} 0(a_m) &= m(2g-2) + \sum_{x \in X} \left[m\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right] \\ &\geqslant m(2g-2) + (m-1)\sum_{x \in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right) \end{aligned}$$

ou encore

$$0(a_m) \geqslant (m-1)\left(2g-2+\sum_{x \in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right) + 2g - 2\,.$$

Si m est au moins égal à 2, le résultat est donc une conséquence du lemme 3

§ 7. Variétés de Picard et de Jacobi

Désignons par E un espace vectoriel complexe de dimension finie n et par Γ un réseau de E (i.e. un sous-groupe abélien de rang $2n$). L'application canonique π de E dans E/Γ est un revêtement. On munit E/Γ de l'unique structure holomorphe faisant de π un isomorphisme local. On appelle *tore complexe* toute variété holomorphe isomorphe à une variété de la forme E/Γ.

Soit T (resp. T') un tore complexe de la forme E/Γ (resp. E'/Γ') et soit u un isomorphisme de T sur T'. On désigne par π (resp. π') l'application canonique de E dans T (resp. de E' dans T'). Quitte à modifier u par un automorphisme de T', on peut supposer que l'on a

$$u(\pi(0)) = \pi'(0)\,.$$

Il existe alors un isomorphisme v de E sur E' et un seul tel que

$$v(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \pi' \cdot v = u \cdot \pi\,.$$

Pour tout élément γ de Γ, l'image $v(\gamma)$ est un élément γ' de Γ' et l'on vérifie aisément que l'on a

$$v(z+\gamma) = v(z) + \gamma'$$