§5. Le corps des fonctions méromorphes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

§ 5. Le corps des fonctions méromorphes

Lemme 1. *Soient* $x_1, \ldots, x_n$ *des points distincts de* X *et soit* r *un entier compris entre* 0 *et* n. *Il existe une fonction méromorphe* f *sur* X *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Les points $x_1, \ldots, x_n$ *appartiennent au domaine de régularité de* f.

(2) Les nombres complexes $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ *sont deux à deux distincts et non nuls.*

(3) L'ordre de f *aux points* $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *est égal à* 1.

Soit x_0 un point de $X \setminus \{ x_1, \ldots, x_n \}$. Pour tout entier j compris entre 1 et r, on définit un diviseur u_j sur X en posant

$$\begin{cases} u_j(x_k) = 1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad k \neq j \\ u_j(x_0) = 2g+1-n & \\ u_j(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in X \setminus \{x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n\}\,. \end{cases}$$

Désignons par π un fibré en droites holomorphes sur X et par s_j une section méromorphe de π dont le diviseur est u_j. Puisque la classe de Chern de π est égale à $2g$, il existe une section holomorphe t_j de π qui ne s'annule en aucun des points $x_1, \ldots, x_n$ (§ 4, proposition 1, corollaire 1). La fonction méromorphe définie par

$$f_j = \frac{s_j}{t_j}$$

est régulière en chacun des points $x_1, \ldots, x_n$. Elle est non nulle au point x_j et possède un zéro simple en chacun des points $x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n$. Il suffit alors de prendre pour f une combinaison linéaire convenable des fonctions $f_1, \ldots, f_r$.

Nous allons étudier le corps $\mathscr{K}(X)$ des fonctions méromorphes sur X. Toute fonction méromorphe non constante f sur X permet d'identifier le corps $\mathscr{K}(\mathbf{P}^1)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{P}^1$ au sous-corps $\mathbf{C}(f)$ de $\mathscr{K}(X)$ engendré par f (chap. I, § 5, lemme 2).

Lemme 2. *Soit* f *une fonction méromorphe non constante de degré* r *sur* X. *Pour toute fonction méromorphe* g *sur* X *il existe un polynôme* p *de degré* r *dans* $\mathbf{C}(f)[T]$ *tel que* $p(g)$ *soit identiquement nulle. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le polynôme p *est irréductible.*

(2) Le discriminant de p *est non nul.*

(3) Il existe une valeur régulière y *de* f *telle que* g *sépare les points de* $f^{-1}(y)$.

On désigne par $\sigma_1, ..., \sigma_r$ les fonctions symétriques élémentaires à r indéterminées. Les fonctions $f_{\sigma_1}(g), ..., f_{\sigma_r}(g)$ sont méromorphes sur $\mathbf{P}^1$ (chap. I, § 4, proposition 2). Il suffit alors de poser

$$p = T^r + f_{\sigma_1}(g)\, T^{r-1} + \dots + f_{\sigma_r}(g) .$$

Pour démontrer la seconde assertion, il suffit de montrer que (3) implique (1). Supposons que l'on ait

$$p = p_1 p_2$$

avec p_1 et p_2 dans $\mathbf{C}(f)[T]$. L'une au moins des fonctions méromorphes $p_1(g)$ ou $p_2(g)$ est identiquement nulle. Désignons par y une valeur régulière de f telle que g sépare les points de $f^{-1}(y)$. On peut supposer que les coefficients de p_1 et p_2 sont holomorphes au voisinage de y. Si $p_1(g)$ est identiquement nulle, le polynôme $p_1(y, T)$ a r racines distinctes, il est donc de degré r ce qui démontre l'assertion.

LEMME 3. *Soient* f *et* g *deux fonctions méromorphes sur* X. *On suppose que* f *est non constante de degré* r *et qu'il existe un polynôme irréductible* p *de degré* r *dans* $\mathbf{C}(f)[T]$ *tel que* $p(g)$ *soit identiquement nulle. Pour toute fonction méromorphe* h *sur* X, *il existe un polynôme* q *de degré au plus* $r-1$ *dans* $\mathbf{C}(f)[T]$ *tel que* h *soit égal à* $q(g)$.

En particulier, le corps $\mathscr{K}(X)$ *est engendré par* f *et* g.

Pour toute valeur régulière y de f telle que $f^{-1}(y)$ ne contienne ni pôles de g ni pôles de h, on pose

$$a(y, T) = p(y, T) \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{h(x)}{T - g(x)} .$$

Le polynôme a appartient à $\mathbf{C}(f)[T]$ (chap. I, § 4, proposition 2). Si g sépare les points de $f^{-1}(y)$, on a

$$h(x) = \frac{a(y, g(x))}{p'(y, g(x))}$$

pour tout point x de $f^{-1}(y)$, en désignant par p' le polynôme dérivé $\dfrac{\partial p}{\partial T}$ (lemme 2). Le principe du prolongement analytique montre que l'on a

$$h = \frac{a(g)}{p'(g)} .$$

Comme p est irréductible, il existe des polynômes a_1 et a_2 de $\mathbf{C}(f)[T]$ tels que

$$a = a_1 p' + a_2 p$$

(appendice III). On en déduit que l'on a

$$h = a_1(g)$$

et il suffit d'éliminer les termes de degré supérieur à r au moyen de la relation

$$p(g) = 0 .$$

THÉORÈME 1. *Il existe une courbe algébrique projective Y dans $\mathbf{P}^2$ et une application holomorphe π de X dans $\mathbf{P}^2$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Le couple (X, π) est une normalisation de Y.

(2) L'application π^* induit un isomorphisme de $\kappa(Y)$ sur $\mathscr{K}(X)$.

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X et soit y une valeur régulière de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points de $f^{-1}(y)$ (lemme 1) et un polynôme irréductible p de degré m dans $\mathbf{C}[T_1, T_2]$ tel que $p(f, g)$ soit nulle (lemme 2). On définit un polynôme homogène irréductible de degré m dans $\mathbf{C}[T_0, T_1, T_2]$ en posant

$$\tilde{p}(T_0, T_1, T_2) = T_0^m p\left(\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_0}\right).$$

On désigne par Y le lieu des zéros de $\tilde{p}$ dans $\mathbf{P}^2$ et par π l'application holomorphe $(f{:}g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ (§ 4, remarque 1).

Pour démontrer la première assertion, il suffit de vérifier que π induit un isomorphisme de $X \setminus \pi^{-1}(A)$ sur $Y \setminus A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de Y (chap. I, § 5, lemme 10). Or cette application est propre et holomorphe, elle est de degré 1 par construction. Ceci démontre l'assertion.

La seconde assertion est une conséquence immédiate du lemme 3.

COROLLAIRE 1. *Pour que deux courbes holomorphes compactes connexes X et Y soient isomorphes, il faut et il suffit que les corps $\mathscr{K}(X)$ et $\mathscr{K}(Y)$ soient isomorphes.*

C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la normalisation d'une courbe algébrique projective.

Corollaire 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$ est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes.*

Désignons par $\underline{a}$ l'idéal des polynômes de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$ qui s'annulent sur $\psi^{-1}(X)$, où ψ est la projection canonique de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n$, et par Y le lieu des zéros de $\underline{a}$ dans $\mathbf{P}^n$. Puisque $\psi^{-1}(X)$ est connexe, l'idéal $\underline{a}$ est premier. Le corps $\kappa(Y)$ des fonctions rationnelles sur Y est un sous-corps de $\mathscr{K}(X)$. Le théorème 1 montre alors que Y est une courbe algébrique de $\mathbf{P}^n$. Désignons par Y_0 l'ensemble des points réguliers de Y et posons

$$X_0 = Y_0 \cap X .$$

L'ensemble X_0 est à la fois ouvert et fermé dans Y_0. Comme ce dernier ensemble est connexe (chap. I, § 5, théorème 4), on en déduit que X est égal à Y, d'où l'assertion.

Théorème 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X se plonge dans $\mathbf{P}^3$.*

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X. On désigne par y une valeur régulière de f, par $x_1, ..., x_r$ les points de $f^{-1}(y)$, par $x_{r+1}, ..., x_n$ les points critiques de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points $x_1, ..., x_r$ et possédant un zéro simple aux points $x_{r+1}, ..., x_n$ (lemme 1). Désignons par π l'application $(f:g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ et par Y son image. L'application π est partout de rang 1 et le couple (X, π) est une normalisation de Y (théorème 1). Soit A l'ensemble des points singuliers de Y et soit h une fonction méromorphe sur X séparant les points de $\pi^{-1}(A)$ (lemme 1). On montre aisément que l'application $(f:g:h)$ est un plongement de X dans $\mathbf{P}^3$.

§ 6. Formes automorphes

Pour tout automorphisme γ du disque unité $\mathbf{D}$, on définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}$ en posant

$$j_\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z} .$$

Pour tout couple (γ, γ') d'automorphismes et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$j_{\gamma'\gamma}(z) = j_{\gamma'}(\gamma z) j_\gamma(z) .$$