Chapitre IV COURBES HOLOMORPHES COMPACTES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

CHAPITRE IV

COURBES HOLOMORPHES COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X *une courbe holomorphe compacte et connexe.*

§ 1. THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DE WEYL

PROPOSITION 1. *Pour toute forme différentielle* u *de* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ *(resp.* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$*), il existe une fonction* v *de* $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ *telle que* $u + d'v$ *(resp.* $u - d''v$*) soit fermée.*

Pour qu'une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur $d' \cdot d''$, il faut et il suffit que son intégrale soit nulle (chap. III, § 3, proposition 4). La formule de Stokes montre qu'il en est ainsi de la forme différentielle du. Il existe par conséquent une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$du = (d' \cdot d'')(v) = -(d'' \cdot d')(v)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Les opérateurs différentiels*

$$d : \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}}) = \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

$$d'' : \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1}) \quad et \quad d' \cdot d'' : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

ont même image.

En particulier, l'intégration des formes différentielles de degré 2 *induit des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{H}^1(X) = \mathbf{H}^1(X, \Omega^{1,0}) = \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) = \mathbf{C}.$$

Les inclusions

$$\mathrm{Im}(d' \cdot d'') \subset \mathrm{Im}(d'') \subset \mathrm{Im}(d)$$

sont évidentes. Réciproquement, toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + u_2$$

avec u_1 de bidegré (1, 0) et u_2 de bidegré (0, 1). La proposition 1 montre qu'il existe des fonctions v_1 et v_2 de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telles que

$$d(u_1 + d'v_1) = 0 \quad \text{et} \quad d(u_2 - d''v_2) = 0 .$$

On en déduit que

$$du = du_1 + du_2 = (d' \cdot d'')(v_1 + v_2)$$

ce qui démontre le corollaire.

Remarque 1.

On vient de donner une autre démonstration du fait que $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{C}$ pour une surface différentielle compacte connexe sous-jacente à une courbe holomorphe (chap. 0, § 4, théorème 3).

THÉORÈME 1 (Weyl). *Toute forme différentielle fermée* u *de* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ *s'écrit d'une manière et d'une seule*

$$u = u_1 + u_2 + dv$$

où u_1 *et* u_2 *sont des formes différentielles fermées de* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ *et* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ *respectivement et* v *une fonction de* $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$.

Montrons tout d'abord l'existence de la décomposition. On peut écrire

$$u = u_1' + u_2'$$

avec u_1' de bidegré (1, 0) et u_2' de bidegré (0, 1). Il existe une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d(u_1' - d'v) = 0$$

(proposition 1). Il suffit alors de poser

$$u_1 = u_1' - d'v \quad \text{et} \quad u_2 = u_2' - d''v .$$

Pour montrer l'unicité, on suppose que l'on a

$$u_1 + u_2 + dv = 0 .$$

En appliquant l'opérateur différentiel d' aux deux membres de cette équation, on voit que v est harmonique, donc constante, ce qui démontre la proposition.

Toute forme différentielle holomorphe de degré 1 étant fermée, l'inclusion canonique de $\mathscr{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ induit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

Désignons par $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ l'ensemble des formes différentielles fermées de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. On définit une application linéaire $\tilde{\beta}$ de $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ en associant à toute forme fermée sa composante de bidegré (0, 1). Par passage aux quotients, cette application définit une application linéaire β de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.

PROPOSITION 2. *La suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires*

$$0 \to \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \to 0$$

est exacte.

La surjectivité de β résulte de la proposition 1, et le seul point non absolument trivial est de démontrer que tout élément u de $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ dont l'image par $\tilde{\beta}$ est de la forme $d''v$ est équivalent à une forme différentielle holomorphe. Or, la relation

$$u = u_1 + d''v$$

avec u_1 homogène de bidegré (1, 0) peut s'écrire

$$u = u_1 - d'v + dv\,.$$

La forme différentielle $u_1 - d'v$ étant fermée et homogène de bidegré (1,0), elle est holomorphe ce qui démontre l'assertion.

On appelle *genre de* X la dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$. Par dualité (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire), c'est aussi la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. La proposition 2 montre que c'est un invariant différentiel (et même topologique): c'est la moitié de la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ (chap. 0, § 5, remarque 2).

Exemple 1.

Le genre de $\mathbf{P}^1$ est nul. En effet, désignons par u une forme différentielle holomorphe sur $\mathbf{P}^1$. Pour chacune des cartes usuelles de $\mathbf{P}^1$, on peut écrire

$$u_{\phi 0} = v_0 dz \qquad \text{et} \qquad u_{\phi 1} = v_1 dz$$

où v_0 et v_1 sont des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$. Par changement de cartes, on voit que l'on a

$$v_0(z) = -\frac{1}{z^2} v_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

en tout point z de $\mathbf{C}^*$. Ceci n'est possible que si v_0 et v_1 sont nulles.

Exemple 2.

Le genre d'une courbe elliptique X (chap. I, § 5, numéro 3) est égal à 1. En effet, toute forme différentielle holomorphe sur X se relève en une forme différentielle holomorphe $u\,dz$ sur $\mathbf{C}$. La fonction u étant invariante, elle est constante, ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 3. *La classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe* π *sur* X *est un entier relatif égal à l'ordre de toute section méromorphe de* π. *En particulier, si la classe de Chern est strictement négative, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *est nul. Si la classe de Chern est nulle, le fibré* π *est différentiablement trivial. S'il est holomorphiquement trivial, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *est de dimension* 1, *sinon il est nul.*

Ces résultats sont énoncés ici pour mémoire (chap. I, § 4, lemme 1).

§ 2. PROBLÈMES DE COUSIN

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Nous avons vu (chap. I, § 3, proposition 2), qu'il existe une suite exacte

$$\mathscr{K}(X,\pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathscr{Q}(X,\pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X,\pi)$$

permettant de trouver sous quelles conditions il existe une section méromorphe de π ayant une partie principale donnée.

Soit u une partie principale de π et soit v une section holomorphe de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$. On vérifie aisément que la classe de (w_x, v_x) dans $\mathscr{Q}(\Omega^{1,0})_x$ ne dépend pas de la section méromorphe w de π représentant u au voisinage de x. On définit ainsi une partie principale de $\Omega^{1,0}$ que l'on désigne par (u, v) et l'on pose

$$\text{Rés}(u,v) = \sum_{x\in X} \text{Rés}\big((u,v),x\big).$$

On a alors la solution suivante au premier problème de Cousin.

THÉORÈME 1. *Soit* π *un fibré vectoriel holomorphe sur* X. *Pour qu'une partie principale* u *de* π *provienne d'une section méromorphe, il faut et il suffit que la forme linéaire* Rés$(u, \ )$ *soit identiquement nulle sur* $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Rappelons tout d'abord la construction de $\delta(u)$ (chap. I, § 3, proposition 2). Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de X pour lesquels le germe u_x

n'est pas nul et par $(U_j)_{0 \leq j \leq n}$ un recouvrement ouvert de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 1 et n, l'ensemble U_j est le domaine d'une carte ϕ_j centrée au point x_j.

(2) Les ensembles $U_1, ..., U_n$ sont deux à deux disjoints.

(3) L'ensemble U_0 est égal à $X \backslash \{x_1, ..., x_n\}$.

Quitte à diminuer $U_1, ..., U_n$, on peut supposer qu'il existe une section méromorphe u_j de π sur U_j représentant $u|_{U_j}$. On désigne par u_0 la fonction nulle sur U_0. Pour tout entier j compris entre 0 et n, il existe une section s_j de $\mathscr{C}^\infty(U_j, \pi)$ telle que

$$u_k - u_j = s_k - s_j$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). En particulier, les $d''s_j$ se recollent en une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dont la classe dans $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ est précisément $\delta(u)$.

En vertu du théorème de dualité, il suffit de montrer que l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X (t, v) = \text{Rés}(u, v)$$

pour toute section holomorphe v de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$.

Les sections $s_j - u_j$ se recollent en une section h de $\mathscr{C}^\infty(U_0, \pi)$ et l'on a

$$d''h = t|_{U_0}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X (t, v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{X \backslash \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_{j,\varepsilon}} (d''h, v) = \sum_{1 \leq j \leq n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (h, v)$$

où $V_{j,\varepsilon}$ désigne le disque de centre x_j et de rayon ε dans ϕ_j. D'autre part, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (s_j, v) = 0$$

car s_j est continue au point x_j et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (u_j, v) = \text{Rés}((u, v), x_j)$$

ce qui démontre l'assertion.

Exemple 1.

Le genre de $\mathbf{P}^1$ étant nul, toute partie principale u de $\mathbf{C}_{\mathbf{P}^1}$ provient d'une fonction méromorphe, résultat qu'il est d'ailleurs facile de démontrer directement (chap. I, § 5, lemme 2).

Exemple 2.

Supposons que X soit une courbe elliptique. Pour qu'une partie principale u de $\mathbf{C}_X$ provienne d'une fonction méromorphe, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{Rés}\,(u, dz) = 0$$

(§ 1, exemple 2) (que le lecteur se souvienne de la fonction elliptique p de Weierstrass!).

Exemple 3.

Si X est une courbe holomorphe quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie principale u de $\Omega^{1,0}$ provienne d'une forme différentielle méromorphe est que l'on ait

$$\text{Rés}\,(u, 1) = 0\,.$$

Parmi les formes différentielles méromorphes, on distingue les espèces suivantes:

(1) Les formes différentielles holomorphes ou *formes différentielles abéliennes de première espèce.*

(2) Les formes différentielles méromorphes dont les seules singularités sont des pôles d'ordre au moins 2 à résidu nul ou *formes différentielles abéliennes de deuxième espèce.*

(3) Les formes différentielles méromorphes ayant comme seules singularités un nombre pair de pôles d'ordre 1, groupés deux par deux de résidus opposés, ou *formes différentielles abéliennes de troisième espèce.*

Avant d'aborder le deuxième problème de Cousin pour les courbes holomorphes compactes, il nous faut introduire quelques notions.

Pour toute forme différentielle w de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction h_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$d'' h_\iota = w\,|_{U_\iota}\,.$$

C'est une conséquence immédiate du lemme de Grothendieck (chap. III, § 1, remarque 2). Sur $U_\iota \cap U_\kappa$, la fonction définie par

$$h_{\kappa\iota} = h_\kappa - h_\iota$$

est holomorphe et l'on vérifie aisément que la famille $(g_{\kappa\iota})$ avec

$$g_{\kappa\iota} = \exp(2i\pi h_{\kappa\iota})$$

est un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à $(U_\iota)_{\iota\in I}$ dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. On obtient ainsi un homomorphisme canonique

$$\theta : \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \to \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*) .$$

Soit u un diviseur d'ordre 0 sur X. On peut l'écrire sous la forme (chap. I, § 4, lemme 3)

$$u = \sum_{1\leq j\leq n} y_j - x_j$$

où $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des points de X (non nécessairement distincts).

On appelle *chaîne bordant u* toute famille $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ où c_j est un chemin joignant x_j à y_j dans X.

Le lemme suivant est à rapprocher d'un résultat démontré précédemment (chap. O, § 5, proposition 1).

LEMME 1. *Soit u un diviseur d'ordre 0 sur X et soit $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ une chaîne bordant u. Il existe une forme différentielle w de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image par θ de la classe de w est le fibré principal associé à u.

(2) Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, on a

$$\int_X v \wedge w = \sum_{1\leq j\leq n} \int_{c_j} v .$$

On se ramène aisément au cas d'un seul chemin c joignant un point z_0 à un point z_1 dans le domaine U_0 d'une carte ϕ de X dont l'image est un disque de $\mathbf{C}$. Il n'y a pas ici de problème de lissage *(loc. cit.)*.

On désigne par W et V deux disques de ϕ tels que W soit relativement compact dans V et V relativement compact dans U_0 et tels que l'image de c soit contenue dans W. Le diviseur u est représenté sur U_0 par la fonction méromorphe

$$u_0(z) = \frac{\phi(z) - \phi(z_1)}{\phi(z) - \phi(z_0)}$$

et sur le complémentaire U_1 de $\overline{V}$ par la fonction constante 1.

Désignons par α une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 sur $X \backslash V$, à 0 sur $\overline{W}$ et par h un logarithme de u_0 sur $U_0 \backslash \overline{W}$. La forme différentielle définie par

$$\begin{cases} w = 0 & \text{sur } (X \backslash U_0) \cup \overline{W} \\ w = \dfrac{1}{2i\pi} d''(\alpha h) & \text{sur } U_0 \backslash \overline{W} \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$.

La propriété (1) résulte immédiatement des définitions. Pour démontrer (2), on remarque que la restriction de v à U_0 est exacte. On a donc

$$\int_X v \wedge w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overline{V}} v \wedge d''(\alpha h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overline{V}} df \wedge d(\alpha h)$$

où f est une fonction holomorphe sur U_0. Il résulte alors de la formule de Stokes que l'on a

$$\int_X v \wedge w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V} f \frac{du_0}{u_0} = f(z_1) - f(z_0)$$

ce qui démontre l'assertion.

Théorème 2 (Abel). *Pour qu'un diviseur u d'ordre 0 soit le diviseur d'une fonction méromorphe, il faut et il suffit qu'il existe une chaine $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ bordant u telle que*

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v = 0$$

pour toute forme différentielle holomorphe v sur X.

Montrons que la condition est nécessaire. On peut supposer u non nul. On désigne par h une fonction méromorphe sur X dont u est le diviseur, par n le degré de h (chap. I, § 4) et par B l'ensemble des valeurs critiques de h.

Soit c un chemin joignant $(0:1)$ à $(1:0)$ dans $\mathbf{P}^1$, ne rencontrant pas B, sauf peut-être en ses extrémités. Il existe n chemins distincts $c_1, \ldots, c_n$ relevant c, chacun joignant un pôle de h à un zéro de h. La chaîne $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ borde u et l'on a

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v = \int_c h_*(v)$$

(chap. I, § 4, proposition 3). On conclut en remarquant que $h_*(v)$ est nulle (§ 1, exemple 1).

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Désignons par w une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions du lemme 1. La relation

$$\int_X v \wedge w = 0$$

pour toute forme différentielle holomorphe v montre que la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ est nulle (théorème de dualité, chap. III, § 2). On en déduit que le fibré principal associé à u est trivial, ce qui démontre le théorème (chap. I, § 3, proposition 3).

§ 3. Théorème de Riemann-Roch

Pour tout fibré vectoriel holomorphe π sur X, les espaces vectoriels complexes $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sont de dimension finie (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire). On pose

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^1(X, \pi).$$

Le théorème de dualité *(loc. cit.)* montre que l'on a aussi

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}).$$

Proposition 1. *Désignons par π un fibré vectoriel holomorphe de rang p sur X et par ρ un fibré en droites holomorphe associé à un diviseur u de X. On a alors*

$$\chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + p\, 0(u).$$

On se ramène aisément au cas où u est de la forme

$$u = 1 \cdot x$$

pour un certain point x de X. Désignons par s une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Le diagramme suivant est commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) \\ {\scriptstyle d''} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle d''} \\ \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho). \end{array}$$

Pour tout fibré vectoriel différentiel σ sur X, le passage aux germes induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma \otimes \rho) & \to & V(\sigma) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \alpha} & & \\ 0 & \to & A_x^\infty(\sigma) & \xrightarrow{\otimes s_x} & A_x^\infty(\sigma \otimes \rho) & \to & W(\sigma) & \to & 0 \end{array}$$

où $V(\sigma)$ et $W(\sigma)$ désignent les conoyaux de $\otimes\, s$ et $\otimes\, s_x$ respectivement. La section s ne s'annulant qu'au point x, les lignes de ce diagramme sont exactes et l'application α est un isomorphisme. Ceci montre que le diagramme (*) se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathscr{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi\otimes\rho) & \to & W(\pi) & \to 0 \\
& d'' \downarrow & & d'' \downarrow & & \downarrow \beta & \\
0 \to & \mathscr{C}^\infty(X, \pi\otimes\Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi\otimes\Omega^{0,1}\otimes\rho) & \to & W(\pi\otimes\Omega^{0,1}) & \to 0
\end{array}$$

On a alors (diagramme du serpent),

$$\chi(\pi) - \chi(\pi\otimes\rho) + \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}(\beta) - \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Coker}(\beta) = 0$$

et il suffit de vérifier les égalités

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}(\beta) = p \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Coker}(\beta) = 0\,.$$

Ceci étant un problème de germes, on peut supposer que x est l'origine dans $\mathbf{C}$, que π est le fibré produit de rang p et ρ le fibré produit de rang 1. L'application

$$\beta : (A_0^\infty)^p/s_0(A_0^\infty)^p \to (A_0^\infty)^p/s_0(A_0^\infty)^p$$

étant induite par l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial}{\partial\,\bar z}$, elle est surjective (chap. III, § 1, remarque 2). D'autre part, pour tout germe u de $(A_0^\infty)^p$ vérifiant la relation

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = s_0\, v$$

pour un certain v, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(u - s_0\, w) = 0$$

pour un certain w *(loc. cit.)*. Le germe $u - s_0\, w$ étant holomorphe, il existe un germe h de $(A_0^\infty)^p$ tel que

$$u - s_0 w - u(0) = s_0 h\,.$$

Ceci montre que le noyau de β est constitué des germes d'applications constantes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^p$ ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. *Tout fibré en droites holomorphes π sur X est associé à un diviseur.*

Pour tout fibré en droites holomorphes ρ sur X associé à un diviseur u, on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho) \geqslant \chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + 0(u).$$

Si l'ordre de u est bien choisi, le fibré $\pi \otimes \rho$ possède une section holomorphe non nulle s. On en déduit que le fibré π est associé au diviseur $(s) - u$.

THÉORÈME 1 (Riemann-Roch). *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a*

$$\chi(\pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi)$$

où g désigne le genre de X.

On peut supposer que π est associé à un diviseur u (proposition 1, corollaire). On a donc

$$\chi(\pi) = \chi(\mathbf{C}_X) + 0(u) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi)$$

(proposition 1 et § 1, proposition 3), ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a la relation*

$$\mathrm{ch}(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = 2g - 2 - \mathrm{ch}(\pi).$$

En particulier, la classe de Chern du fibré $\Omega^{1,0}$ est égale à $2g - 2$.

Il suffit de remarquer que l'on a

$$\chi(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = -\chi(\pi) = -(1 - g + \mathrm{ch}(\pi))$$

et d'appliquer le théorème de Riemann-Roch.

PROPOSITION 2. *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a les relations suivantes :*

(1) $\mathrm{ch}(\pi) < 0 \Rightarrow \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0.$

(2) $\mathrm{ch}(\pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0 & \text{si } \pi \text{ \textit{n'est pas (holomorphiquement) trivial.}} \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 & \text{si } \pi \text{ \textit{est (holomorphiquement) trivial.}} \end{cases}$

(3) $\mathrm{ch}(\pi) = 2g - 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g - 1 & \text{\textit{si} } \pi \text{ \textit{n'est pas isomorphe à} } \Omega^{1,0}. \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g & \text{\textit{si} } \pi \text{ \textit{est isomorphe à} } \Omega^{1,0}. \end{cases}$

(4) $\mathrm{ch}(\pi) > 2g - 2 \Rightarrow \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi).$

Les deux premières assertions ont déjà été démontrées (§ 1, proposition 3). Pour démontrer les deux dernières, il suffit de remarquer que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0 (X, \pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi) + \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0 (X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$$

et d'appliquer ce qui précède au fibré $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$.

Remarque 1.

Pour tout diviseur u sur X, on pose

$$L(u) = \{ h \in \mathscr{K}(X) \mid h = 0 \quad \text{ou} \quad (h) \geqslant -u \}$$
$$I(u) = \{ s \in \mathscr{K}(X, \Omega^{1,0}) \mid s = 0 \quad \text{ou} \quad (s) \geqslant u \} .$$

Désignons par π un fibré en droites holomorphes associé à u. Nous avons vu que l'espace vectoriel $L(u)$ (resp. $I(u)$) est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathbf{H}^0 (X, \pi)$ (resp. $\mathbf{H}^0 (X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$) (chap. I, § 3). En désignant sa dimension par $l(u)$ (resp. $i(u)$), le théorème de Riemann-Roch prend la forme plus classique suivante:

$$l(u) - i(u) = 1 - g + 0(u) .$$

THÉORÈME 2 (Riemann-Hurwitz). *Soient X et Y deux courbes holomorphes compactes connexes de genre $g(X)$ et $g(Y)$ respectivement et soit h une application holomorphe non constante de X dans Y. On a la formule*

$$2g(X) - 2 = \deg(h)\big(2g(Y) - 2\big) + v(h)$$

où $v(h)$ désigne l'indice de ramification de h [1].

Désignons par u une forme différentielle méromorphe non nulle sur Y. On a

$$0\big(h^*(u)\big) = \sum_{x \in X} 0_x\big(h^*(u)\big) = \sum_{x \in X} \big(v_x(h) + 1\big)\, 0_{h(x)}(u) + v(h)$$

(chap. I, § 4, lemme 2) et par conséquent

$$0\big(h^*(u)\big) = \sum_{y \in Y} \Big(\sum_{x \in u^{-1}(y)} \big(v_x(h) + 1\big)\Big)\, 0_y(u) + v(h) = \deg(h)\, 0(u) + v(h)$$

et l'on conclut en remarquant que l'ordre de $h^*(u)$ (resp. u) est égal à $2g(X) - 2$ (resp. $2g(Y) - 2$) (théorème 1, corollaire).

COROLLAIRE. *Pour qu'il existe une application holomorphe non constante de X dans Y, il faut que le genre de Y soit au plus égal au genre de X.*

---

[1] C'est à dire la somme des indices de ramification de h aux différents points de X (chap. I, § 4).

§ 4. Fibrés amples

Dans tout ce paragraphe, on désigne par g le genre de X et par π un fibré en droites holomorphes sur X.

Soient $s_0, \ldots, s_n$ des sections holomorphes de π dont l'une au moins n'est pas nulle. Pour tout entier j compris entre 0 et n, on pose

$$X_j = \{x \in X \mid s_j(x) \neq 0\}$$

et l'on définit une application holomorphe de X_j dans $\mathbf{P}^n$ par la formule

$$\phi_j(x) = \left(\frac{s_0}{s_j}(x): \ldots : \frac{s_n}{s_j}(x)\right).$$

Par définition même, les ϕ_j se recollent en une application holomorphe ϕ de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$ dans $\mathbf{P}^n$. Pour tout point x de $X \setminus \bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$, il existe un voisinage ouvert U de x, une fonction holomorphe h sur U et des sections holomorphes $s'_0, \ldots, s'_n$ de π sur U dont l'une au moins ne s'annule pas au point x, vérifiant les relations suivantes

$$s_0 = hs'_0, \ldots, s_n = hs'_n.$$

Supposons par exemple $s'_j(x)$ non nul. On prolonge l'application ϕ en posant

$$\phi(x) = \left(\frac{s'_0}{s'_j}(x): \ldots : \frac{s'_n}{s'_j}(x)\right).$$

L'application holomorphe ϕ de X dans $\mathbf{P}^n$ ainsi obtenue se désigne par $(s_0 : \ldots : s_n)$.

On dit que le fibré π est *ample* si pour toute base $(s_0, \ldots, s_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$, l'application $(s_0 : \ldots : s_n)$ est un plongement de X dans $\mathbf{P}^n$.

Remarque 1.

Désignons par $h_1, \ldots, h_n$ des fonctions méromorphes sur X dont l'une au moins n'est pas nulle. On définit un diviseur u sur X en posant

$$u = -\inf((h_1), \ldots, (h_n), 0).$$

Soit ρ un fibré en droites holomorphes sur X et soit s_0 une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Les sections de ρ définies par

$$s_1 = h_1 s_0, \ldots, s_n = h_n s_0$$

sont holomorphes et l'une d'entre elles au moins n'est pas nulle. L'application $(s_0 : ... : s_n)$ se désigne (abusivement) par $(h_1 : ... : h_n)$.

PROPOSITION 1. *Si la classe de Chern de* π *est au moins égale à* $2g$, *les sections holomorphes de* π *n'ont pas de zéro commun.*

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un point x de X où toutes les sections holomorphes de π s'annulent. Désignons par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. L'application

$$\otimes s : \mathbf{H}^0 (X, \pi \otimes \rho^*) \to \mathbf{H}^0 (X, \pi)$$

est injective. Elle est surjective en vertu de l'hypothèse faite sur x. D'autre part, la proposition 2 du paragraphe 3 montre que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0 (X, \pi \otimes \rho^*) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi \otimes \rho^*) = \mathrm{ch}(\pi) - g$$

et

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0 (X, \pi) = 1 + \mathrm{ch}(\pi) - g$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE 1. *On suppose que la classe de Chern de* π *est au moins égale à* $2g$. *Pour tout ensemble fini* A *de* X, *il existe une section holomorphe de* π *qui ne s'annule en aucun point de* A.

Il résulte en effet de la proposition 1 que l'ensemble des sections holomorphes de π qui s'annulent en un point de X forment un hyperplan de $\mathbf{H}^0 (X, \pi)$.

COROLLAIRE 2. *On suppose que la classe de Chern de* π *est au moins égale à* $2g + 1$.

(1) Pour tout couple (x, y) *de points distincts de* X, *il existe une section holomorphe de* π *qui s'annule au point* x *et ne s'annule pas au point* y.

(2) Pour tout point x *de* X, *il existe une section holomorphe de* π *qui possède un zéro simple au point* x.

On désigne par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. La classe de Chern du fibré $\pi \otimes \rho^*$ est au moins égale à $2g$ et la proposition 1 montre qu'il existe une section holomorphe t de ce fibré qui ne s'annule pas au point y (resp. x). La section $t \otimes s$ vérifie la condition (1) (resp. (2)).

THÉORÈME 1. *Si sa classe de Chern est au moins égale à* $2g + 1$, *le fibré* π *est ample.*

Désignons par $(s_0, \ldots, s_n)$ une base de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$. Pour tout couple (x, y) de points de X, il existe un entier j compris entre 0 et n tel que s_j ne s'annule pas sur $\{x, y\}$ (proposition 1, corollaire 1). Par définition, la relation

$$(s_0 : \ldots : s_n)(x) = (s_0 : \ldots : s_n)(y)$$

signifie qu'il existe un nombre complexe λ non nul tel que

$$\left(\frac{s_0}{s_j}(x), \ldots, \frac{s_n}{s_j}(x)\right) = \lambda \left(\frac{s_0}{s_j}(y), \ldots, \frac{s_n}{s_j}(y)\right).$$

Ceci n'est possible que si x et y coïncident (proposition 1, corollaire 2) et par conséquent l'application $(s_0 : \ldots : s_n)$ est injective.

Il reste à montrer qu'elle est de rang 1. Désignons par x un point de X et par s une section holomorphe de π possédant un zéro simple au point x *(loc. cit.)*. On a

$$s = \lambda_0 s_0 + \ldots + \lambda_n s_n$$

et il existe un entier j compris entre 0 et n tel que $s_j(x)$ soit non nul. On a donc

$$\frac{s}{s_j} = \lambda_0 \frac{s_0}{s_j} + \ldots + \lambda_n \frac{s_n}{s_j}$$

et par conséquent

$$d\left(\frac{s}{s_j}\right)(x) = \lambda_0\, d\left(\frac{s_0}{s_j}\right)(x) + \ldots + \lambda_n\, d\left(\frac{s_n}{s_j}\right)(x).$$

Le membre de gauche étant non nul, il existe un entier k compris entre 0 et n tel que $d\,\dfrac{s_k}{s_j}(x)$ soit non nul ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre g se plonge dans $\mathbf{P}^{g+1}$. En particulier, toute courbe holomorphe compacte connexe de genre 0 est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ et toute courbe elliptique se plonge dans $\mathbf{P}^2$.*

Il suffit d'appliquer le théorème 1 au fibré en droites holomorphe associé à un diviseur d'ordre $2g + 1$ et de remarquer que l'on a alors

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g + 2$$

(§ 3, proposition 2).

§ 5. Le corps des fonctions méromorphes

Lemme 1. *Soient* $x_1, \ldots, x_n$ *des points distincts de* X *et soit* r *un entier compris entre* 0 *et* n. *Il existe une fonction méromorphe* f *sur* X *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Les points $x_1, \ldots, x_n$ *appartiennent au domaine de régularité de* f.

(2) Les nombres complexes $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ *sont deux à deux distincts et non nuls.*

(3) L'ordre de f *aux points* $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *est égal à* 1.

Soit x_0 un point de $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour tout entier j compris entre 1 et r, on définit un diviseur u_j sur X en posant

$$\begin{cases} u_j(x_k) = 1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad k \neq j \\ u_j(x_0) = 2g + 1 - n & \\ u_j(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in X \setminus \{x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n\} . \end{cases}$$

Désignons par π un fibré en droites holomorphes sur X et par s_j une section méromorphe de π dont le diviseur est u_j. Puisque la classe de Chern de π est égale à $2g$, il existe une section holomorphe t_j de π qui ne s'annule en aucun des points $x_1, \ldots, x_n$ (§ 4, proposition 1, corollaire 1). La fonction méromorphe définie par

$$f_j = \frac{s_j}{t_j}$$

est régulière en chacun des points $x_1, \ldots, x_n$. Elle est non nulle au point x_j et possède un zéro simple en chacun des points $x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n$. Il suffit alors de prendre pour f une combinaison linéaire convenable des fonctions $f_1, \ldots, f_r$.

Nous allons étudier le corps $\mathscr{K}(X)$ des fonctions méromorphes sur X. Toute fonction méromorphe non constante f sur X permet d'identifier le corps $\mathscr{K}(\mathbf{P}^1)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{P}^1$ au sous-corps $\mathbf{C}(f)$ de $\mathscr{K}(X)$ engendré par f (chap. I, § 5, lemme 2).

Lemme 2. *Soit* f *une fonction méromorphe non constante de degré* r *sur* X. *Pour toute fonction méromorphe* g *sur* X *il existe un polynôme* p *de degré* r *dans* $\mathbf{C}(f)[T]$ *tel que* $p(g)$ *soit identiquement nulle. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le polynôme p *est irréductible.*

(2) Le discriminant de p est non nul.

(3) Il existe une valeur régulière y de f telle que g sépare les points de $f^{-1}(y)$.

On désigne par $\sigma_1, ..., \sigma_r$ les fonctions symétriques élémentaires à r indéterminées. Les fonctions $f_{\sigma_1}(g), ..., f_{\sigma_r}(g)$ sont méromorphes sur $\mathbf{P}^1$ (chap. I, § 4, proposition 2). Il suffit alors de poser

$$p = T^r + f_{\sigma_1}(g)\, T^{r-1} + ... + f_{\sigma_r}(g)\,.$$

Pour démontrer la seconde assertion, il suffit de montrer que (3) implique (1). Supposons que l'on ait

$$p = p_1 \, p_2$$

avec p_1 et p_2 dans $\mathbf{C}(f)[T]$. L'une au moins des fonctions méromorphes $p_1(g)$ ou $p_2(g)$ est identiquement nulle. Désignons par y une valeur régulière de f telle que g sépare les points de $f^{-1}(y)$. On peut supposer que les coefficients de p_1 et p_2 sont holomorphes au voisinage de y. Si $p_1(g)$ est identiquement nulle, le polynôme $p_1(y, T)$ a r racines distinctes, il est donc de degré r ce qui démontre l'assertion.

LEMME 3. *Soient f et g deux fonctions méromorphes sur X. On suppose que f est non constante de degré r et qu'il existe un polynôme irréductible p de degré r dans $\mathbf{C}(f)[T]$ tel que $p(g)$ soit identiquement nulle. Pour toute fonction méromorphe h sur X, il existe un polynôme q de degré au plus $r-1$ dans $\mathbf{C}(f)[T]$ tel que h soit égal à $q(g)$.*

En particulier, le corps $\mathscr{K}(X)$ est engendré par f et g.

Pour toute valeur régulière y de f telle que $f^{-1}(y)$ ne contienne ni pôles de g ni pôles de h, on pose

$$a(y, T) = p(y, T) \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{h(x)}{T - g(x)}\,.$$

Le polynôme a appartient à $\mathbf{C}(f)[T]$ (chap. I, § 4, proposition 2). Si g sépare les points de $f^{-1}(y)$, on a

$$h(x) = \frac{a(y, g(x))}{p'(y, g(x))}$$

pour tout point x de $f^{-1}(y)$, en désignant par p' le polynôme dérivé $\dfrac{\partial p}{\partial T}$ (lemme 2). Le principe du prolongement analytique montre que l'on a

$$h = \frac{a(g)}{p'(g)}\,.$$

Comme p est irréductible, il existe des polynômes a_1 et a_2 de $\mathbf{C}(f)[T]$ tels que

$$a = a_1 p' + a_2 p$$

(appendice III). On en déduit que l'on a

$$h = a_1(g)$$

et il suffit d'éliminer les termes de degré supérieur à r au moyen de la relation

$$p(g) = 0 .$$

THÉORÈME 1. *Il existe une courbe algébrique projective* Y *dans* $\mathbf{P}^2$ *et une application holomorphe* π *de* X *dans* $\mathbf{P}^2$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Le couple (X, π) *est une normalisation de* Y.

(2) L'application π^* *induit un isomorphisme de* $\kappa(Y)$ *sur* $\mathcal{K}(X)$.

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X et soit y une valeur régulière de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points de $f^{-1}(y)$ (lemme 1) et un polynôme irréductible p de degré m dans $\mathbf{C}[T_1, T_2]$ tel que $p(f, g)$ soit nulle (lemme 2). On définit un polynôme homogène irréductible de degré m dans $\mathbf{C}[T_0, T_1, T_2]$ en posant

$$\tilde{p}(T_0, T_1, T_2) = T_0^m \, p\left(\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_0}\right).$$

On désigne par Y le lieu des zéros de $\tilde{p}$ dans $\mathbf{P}^2$ et par π l'application holomorphe $(f{:}g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ (§ 4, remarque 1).

Pour démontrer la première assertion, il suffit de vérifier que π induit un isomorphisme de $X \setminus \pi^{-1}(A)$ sur $Y \setminus A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de Y (chap. I, § 5, lemme 10). Or cette application est propre et holomorphe, elle est de degré 1 par construction. Ceci démontre l'assertion.

La seconde assertion est une conséquence immédiate du lemme 3.

COROLLAIRE 1. *Pour que deux courbes holomorphes compactes connexes* X *et* Y *soient isomorphes, il faut et il suffit que les corps* $\mathcal{K}(X)$ *et* $\mathcal{K}(Y)$ *soient isomorphes.*

C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la normalisation d'une courbe algébrique projective.

Corollaire 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$ est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes.*

Désignons par $\underline{a}$ l'idéal des polynômes de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$ qui s'annulent sur $\psi^{-1}(X)$, où ψ est la projection canonique de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n$, et par Y le lieu des zéros de $\underline{a}$ dans $\mathbf{P}^n$. Puisque $\psi^{-1}(X)$ est connexe, l'idéal $\underline{a}$ est premier. Le corps $\kappa(Y)$ des fonctions rationnelles sur Y est un sous-corps de $\mathscr{K}(X)$. Le théorème 1 montre alors que Y est une courbe algébrique de $\mathbf{P}^n$. Désignons par Y_0 l'ensemble des points réguliers de Y et posons

$$X_0 = Y_0 \cap X .$$

L'ensemble X_0 est à la fois ouvert et fermé dans Y_0. Comme ce dernier ensemble est connexe (chap. I, § 5, théorème 4), on en déduit que X est égal à Y, d'où l'assertion.

Théorème 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X se plonge dans $\mathbf{P}^3$.*

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X. On désigne par y une valeur régulière de f, par $x_1, ..., x_r$ les points de $f^{-1}(y)$, par $x_{r+1}, ..., x_n$ les points critiques de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points $x_1, ..., x_r$ et possédant un zéro simple aux points $x_{r+1}, ..., x_n$ (lemme 1). Désignons par π l'application $(f:g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ et par Y son image. L'application π est partout de rang 1 et le couple (X, π) est une normalisation de Y (théorème 1). Soit A l'ensemble des points singuliers de Y et soit h une fonction méromorphe sur X séparant les points de $\pi^{-1}(A)$ (lemme 1). On montre aisément que l'application $(f:g:h)$ est un plongement de X dans $\mathbf{P}^3$.

§ 6. Formes automorphes

Pour tout automorphisme γ du disque unité $\mathbf{D}$, on définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}$ en posant

$$j_\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z} .$$

Pour tout couple (γ, γ') d'automorphismes et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$j_{\gamma'\gamma}(z) = j_{\gamma'}(\gamma z) j_\gamma(z) .$$

Nous supposerons désormais que X est le quotient de **D** par un groupe proprement discontinu Γ (chap. I, § 5, numéro 3) et nous désignerons par π la projection canonique de **D** dans X.

Soit m un entier relatif. On appelle *forme automorphe de poids m relative à Γ* toute fonction méromorphe f sur **D** telle que

$$f \cdot \gamma = j_\gamma^{-m} f$$

pour tout automorphisme γ de Γ. On désigne par $\mathscr{K}(m, \Gamma)$ (resp. $\mathscr{O}(m, \Gamma)$) l'ensemble des formes automorphes (resp. des formes automorphes holomorphes) de poids m relatives à Γ.

Fixons une fois pour toutes une forme différentielle méromorphe non nulle ω sur X. La forme différentielle $\pi^*(\omega)$ s'écrit

$$\pi^*(\omega) = f\,dz$$

où f est une fonction méromorphe sur **D**. Pour tout automorphisme γ de Γ et tout point z de **D**, on a

$$f(z)\,dz = \pi^*(\omega)(z) = \pi^*(\omega)(\gamma z) = f(\gamma z)\, j_\gamma(z)\,dz$$

ce qui montre que f est une forme automorphe de poids 1 relative à Γ.

Pour toute forme automorphe u de poids m relative à Γ, la fonction méromorphe uf^{-m} est Γ-invariante. On en déduit que l'application Ψ_m de $\mathscr{K}(X)$ dans $\mathscr{K}(m, \Gamma)$ définie par

$$\Psi_m(v) = (v \cdot \pi) f^m$$

est un isomorphisme pour tout entier m.

Nous allons chercher à quelles conditions une fonction méromorphe v sur X fournit une forme automorphe holomorphe sur **D**.

Pour une telle fonction, on a

$$0_z(\Psi_m(v)) = 0_z(\pi^*(v)) + m\, 0_z(\pi^*(\omega)) \geqslant 0$$

pour tout point z de **D**. Cette condition équivaut à

$$0_x(v) \geqslant -m\, 0_x(\omega) - \left[m \left(1 - \frac{1}{\rho_x} \right) \right] \quad {}^{1})$$

pour tout point x de X, où ρ_x désigne le cardinal du groupe d'isotropie de Γ en tout point de $\pi^{-1}(x)$. On définit un diviseur a_m sur X en posant

---

[1]) Pour tout nombre réel c, on désigne par $[c]$ la partie entière de c, i.e. l'entier relatif défini par

$$[c] = \sup \{ n \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant c \} .$$

$$a_m(x) = \left(m\,0_x(\omega) + \left[m\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right]\right) x\,.$$

On voit donc que Ψ_m induit un isomorphisme de $L(a_m)$ sur $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ (§ 3, remarque 1).

Pour toute fonction holomorphe u sur $\mathbf{D}$ et pour tout entier relatif m, la série

$$p_\Gamma(u, m) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (u \cdot \gamma) j_\gamma^m$$

s'appelle la *série de Poincaré associée à* u.

Lemme 1. *Si* u *est bornée et* m *au moins égal à* 2, *la série de Poincaré* $p_\Gamma(u, m)$ *converge uniformément sur tout compact vers une fonction de* $\mathcal{O}(m, \Gamma)$.

Pour montrer que la série $p_\Gamma(u, m)$ converge, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} j_\gamma^2$$

converge dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4). Désignons par z un point de $\mathbf{D}$ et par K un voisinage compact de z dans $\mathbf{D}$ tel que

$$\begin{cases} \gamma K = K & \text{si } \gamma \in \Gamma_z \\ \gamma K \cap K = \varnothing & \text{si } \gamma \notin \Gamma_z \end{cases}$$

(chap. I, § 5, lemme 3). La formule du changement de variable dans les intégrales doubles montre que l'on a

$$\| j_\gamma^2 \|_{L^1, K} = \int_K | j_\gamma |^2 \, d\mu = \mu(\gamma K)\,,$$

et par conséquent

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \| j_\gamma^2 \|_{L^1, K} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma K) = \operatorname{Card}(\Gamma_z)\Big(\sum_{\gamma \in \Gamma_0} \mu(\gamma K)\Big)$$

en désignant par Γ_0 un système de représentants de Γ / Γ_z. Ceci démontre l'assertion puisque les ensembles $(\gamma K)_{\gamma \in \Gamma_0}$ sont deux à deux disjoints et contenus dans $\mathbf{D}$.

Montrons maintenant que $p_\Gamma(u, m)$ est une fonction automorphe de poids m. Pour tout automorphisme γ de Γ et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$\begin{aligned} p_\Gamma(u, m)(\gamma z) &= \sum_{\gamma' \in \Gamma} u(\gamma' \gamma z) j_{\gamma'}^m(\gamma z) = j_\gamma^{-m}(z) \sum_{\gamma' \in \Gamma} u(\gamma' \gamma z) j_{\gamma' \gamma}^m(z) \\ &= j_\gamma^{-m}(z)\, p_\Gamma(u, m)(z) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

Lemme 2. *Pour* m *suffisamment grand, l'espace vectoriel* $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ *est de dimension au moins* 2.

On désigne par z_0 un point de $\mathbf{D}$ qui n'est pas un point fixe de Γ (i.e. un point régulier de l'application π) et par K un voisinage compact de z_0 tel que

$$\gamma K \cap K = \varnothing$$

pour tout automorphisme de Γ différent de l'identité.

Le lemme 1 montre qu'il existe un nombre fini d'automorphismes $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ de Γ, différents de l'identité tels que

$$\| j_\gamma \|^2_{L^\infty, K} \leqslant \frac{1}{2}$$

pour tout automorphisme γ de $\Gamma \backslash \{1, \gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$. On pose

$$z_\nu = \gamma_\nu (z_0)$$

pour tout entier ν compris entre 1 et p. Soit u une fonction holomorphe bornée sur $\mathbf{D}$. Pour tout entier m au moins égal à 2, on peut écrire

$$p_\Gamma (u, m) - u - \sum_{1 \leq \nu \leq p} (u \cdot \gamma_\nu) j^m_{\gamma_\nu} = \sum_{\gamma \in \Gamma'} (u \cdot \gamma) j^m_\gamma$$

où l'on a posé

$$\Gamma' = \Gamma \backslash \{ 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_p \} .$$

Sur le compact K on a donc

$$\| p_\Gamma (u, m) - u - \sum_{1 \leq \nu \leq p} (u \cdot \gamma_\nu) j^m_{\gamma_\nu} \|_{L^\infty, K}$$

$$\leqslant 2^{-m+2} \| u \|_{L^\infty, \mathbf{D}} \sum_{\gamma \in \Gamma'} \| j_\gamma \|^2_{L^\infty, K} .$$

Le membre de droite converge vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Supposons que u possède un zéro d'ordre au moins 2 en chaque point $z_1, \ldots, z_p$. Pour tout nombre réel ε strictement positif et pour tout entier m suffisamment grand, on a

$$| p_\Gamma (u, m)(z_0) - u(z_0) | \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial p_\Gamma (u, m)}{\partial z} (z_0) - \frac{\partial u}{\partial z} (z_0) \right| \leqslant \varepsilon$$

(inégalités de Cauchy). Comme $u(z_0)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial z}(z_0)$ sont arbitraires, ceci démontre l'assertion.

LEMME 3. *Désignons par g le genre de X. Le nombre réel*

$$2g - 2 + \sum_{x \in X} \left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)$$

est strictement positif.

Désignons par m un entier suffisamment grand pour vérifier les conditions suivantes:

(1) L'espace vectoriel $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ est de dimension au moins 2.

(2) Pour tout point x de X, l'entier ρ_x divise m.

Désignons par π_m un fibré en droites holomorphe associé au diviseur a_m. Pour toute section holomorphe non nulle v de π_m, on a

$$\mathrm{ch}(\pi_m) = 0(a_m) = 0(v) \geqslant 0.$$

Si l'ordre de a_m est nul, le fibré π_m est trivial ce qui contredit (1). Il est donc strictement positif et la condition (2) montre que l'on a

$$0(a_m) = m\left(0(\omega) + \sum_{x \in X}\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right)$$

ce qui démontre l'assertion (§ 3, théorème 1, corollaire).

THÉORÈME 1. *Pour tout entier m au moins égal à 2, on a la relation*

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}(m, \Gamma) = (2m-1)(g-1) + \sum_{x \in X}\left[m\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right]$$

où g désigne le genre de X.

D'après la proposition 2 du paragraphe 3, il suffit de montrer que l'ordre de a_m est strictement supérieur à $2g-2$.

Tout d'abord, pour tout couple (m, l) d'entiers strictement positifs, on a

$$\left[m\left(1 - \frac{1}{l}\right)\right] \geqslant (m-1)\left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

En effet, on peut écrire

$$m = ql + r$$

où q et r sont des entiers naturels tels que r soit compris entre 0 et $l - 1$. Si r est nul, on a

$$\left[m\left(1 - \frac{1}{l}\right)\right] = m\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

Sinon q est au plus égal à $\dfrac{m-1}{l}$ et l'on a

$$\left[m\left(1-\frac{1}{l}\right)\right] = m - q - 1 \geqslant m - 1 - \frac{m-1}{l} = (m-1)\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

ce qui établit l'assertion.

On en déduit que

$$\begin{aligned} 0(a_m) &= m(2g-2) + \sum_{x \in X} \left[m\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right] \\ &\geqslant m(2g-2) + (m-1) \sum_{x \in X} \left(1-\frac{1}{\rho_x}\right) \end{aligned}$$

ou encore

$$0(a_m) \geqslant (m-1)\left(2g-2+\sum_{x \in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right) + 2g - 2\,.$$

Si m est au moins égal à 2, le résultat est donc une conséquence du lemme 3

§ 7. Variétés de Picard et de Jacobi

Désignons par E un espace vectoriel complexe de dimension finie n et par Γ un réseau de E (i.e. un sous-groupe abélien de rang $2n$). L'application canonique π de E dans E/Γ est un revêtement. On munit E/Γ de l'unique structure holomorphe faisant de π un isomorphisme local. On appelle *tore complexe* toute variété holomorphe isomorphe à une variété de la forme E/Γ.

Soit T (resp. T') un tore complexe de la forme E/Γ (resp. E'/Γ') et soit u un isomorphisme de T sur T'. On désigne par π (resp. π') l'application canonique de E dans T (resp. de E' dans T'). Quitte à modifier u par un automorphisme de T', on peut supposer que l'on a

$$u(\pi(0)) = \pi'(0)\,.$$

Il existe alors un isomorphisme v de E sur E' et un seul tel que

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \pi' \cdot v = u \cdot \pi\,.$$

Pour tout élément γ de Γ, l'image $v(\gamma)$ est un élément γ' de Γ' et l'on vérifie aisément que l'on a

$$v(z+\gamma) = v(z) + \gamma'$$

pour tout point z de E. En particulier, la dérivée de v est Γ-invariante. Elle est donc constante en vertu du principe du maximum.

Il résulte de ce qui précède que T et T' sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire v de E sur E' tel que

$$v(\Gamma) = \Gamma'$$

(chap. I, § 5, numéro 3).

Lemme 1. *Désignons par* Ω *une matrice de* $M(n, 2n; \mathbf{C})$ *et par* Γ *le sous-groupe de* $\mathbf{C}^n$ *engendré par les vecteurs colonnes de* Ω. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le sous-groupe Γ *est un réseau de* $\mathbf{C}^n$.

(2) La matrice $\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix}$ *est inversible.*

(3) Le vecteur nul est le seul vecteur $(z_1, \ldots, z_n)$ *de* $\mathbf{C}^n$ *tel que le vecteur*

$$(z_1, \ldots, z_n)\, \Omega$$

soit réel.

La démonstration est un simple exercice d'algèbre linéaire.

Lemme 2. *Désignons par* Ω *(resp.* Ω'*) une matrice de* $M(n, 2n; \mathbf{C})$ *et par* Γ *(resp.* Γ'*) le sous-groupe de* $\mathbf{C}^n$ *engendré par les vecteurs colonnes de* Ω *(resp.* Ω'*). On suppose que* Γ *et* Γ' *sont des réseaux. Pour que les tores complexes* $\mathbf{C}^n/\Gamma$ *et* $\mathbf{C}^n/\Gamma'$ *soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe une matrice* M *de* $G(n; \mathbf{C})$ *et une matrice* Λ *de* $G(2n; \mathbf{Z})$ *telles que*

$$\Omega' = M\, \Omega\, \Lambda\,.$$

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Rappelons que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \longrightarrow 0$$

(§ 1, proposition 2). On sait d'autre part que $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel réel de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

Lemme 3. *Par restriction, l'application* β *induit un isomorphisme* $\mathbf{R}$*-linéaire de* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ *sur* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.

Toute forme différentielle (réelle) de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ s'écrit

$$u = v + \overline{v}$$

avec v dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$. En effet, pour toute carte ϕ de domaine U dans X, on a

$$u|_U = u_1 d\phi_1 + u_2 d\phi_2 ,$$

en désignant par ϕ_1 et ϕ_2 les parties réelle et imaginaire de ϕ. Il suffit alors de poser

$$v|_U = \frac{1}{2}(u_1 - iu_2)\, d\phi \qquad \text{et} \qquad \bar{v}|_U = \frac{1}{2}(u_1 + iu_2)\, d\bar{\phi} .$$

Supposons de plus u fermée. L'image par β de la classe de u n'est autre que la classe de $\bar{v}$. Si cette classe est nulle, on a

$$u = v + \bar{v} = d'\bar{f} + d''f$$

pour une certaine fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Il résulte de cette équation que la fonction $f - \bar{f}$ est harmonique, donc constante. On en déduit que

$$u = d'f + d''f = df$$

ce qui démontre l'assertion.

Il résulte en particulier du lemme 3 que l'image par β du sous-groupe $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est un réseau de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ (chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 2). Notons que l'image par β de la classe d'un élément h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ est la classe de la différentielle

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{d''h}{h} .$$

PROPOSITION 1. *La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

est exacte [1]).

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u|_{U_\iota} = d''f_\iota .$$

Les fonctions définies sur $U_\iota \cap U_\kappa$ par

$$f_{\kappa\iota} = f_\kappa - f_\iota \qquad \text{et} \qquad g_{\kappa\iota} = \exp(2i\pi f_{\kappa\iota})$$

sont holomorphes et la famille $(g_{\kappa\iota})$ est un cocycle de rang 1 subordonnée à (U_ι) dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ est précisément l'image par θ de la

---

[1]) La définition de θ a été donnée au paragraphe 2.

classe de u. Désignons par π un fibré en droites holomorphe sur X correspondant à ce cocycle. Les fonctions $\exp(2i\pi f_\iota)$ se recollent en une section partout non nulle f de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ ce qui montre déjà que la classe de Chern de π est nulle.

Si u est de la forme

$$u = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h}$$

pour une certaine fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, la section $h^{-1}f$ de π est holomorphe et partout non nulle ce qui montre que π est trivial.

Réciproquement, si π est trivial, il existe pour tout indice ι une fonction holomorphe inversible g_ι sur U_ι telle que

$$g_\kappa = g_{\kappa\iota}\, g_\iota\,.$$

Les fonctions $\exp(2i\pi f_\iota)\, g_\iota^{-1}$ se recollent en une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ et l'on a

$$\left.\frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h}\right|_{U_\iota} = d''f_\iota = u\,|_{U_\iota}\,.$$

Ceci montre que la classe de u est dans l'image de β.

Il reste à voir que tout fibré en droites holomorphe π sur X dont la classe de Chern est nulle provient d'un élément de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. Désignons par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de X par des ensembles simplement connexes et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à (U_ι), représentant π. Le fibré π étant différentiablement trivial (chap. 0, § 5, théorème 4), il existe pour tout indice ι une fonction g_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$g_\kappa = g_{\kappa\iota}g_\iota\,.$$

Puisque U_ι est simplement connexe, il existe une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$g_\iota = \exp(2i\pi f_\iota)\,.$$

Il résulte de ces définitions que l'on a

$$d''f_\iota = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''g_\iota}{g_\iota} = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''g_\kappa}{g_\kappa} = d''f_\kappa\,.$$

Autrement dit, les formes différentielles $d''f_\iota$ se recollent en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ ayant toutes les propriétés requises.

Le noyau de ch s'identifie au quotient de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ par le réseau $\operatorname{Im}\beta$. Ce noyau est donc un tore complexe de dimension g que l'on appelle la *variété de Picard de* X et que l'on désigne par **Pic** (X).

Désignons par G le groupe fondamental de X en un point base x_0 et par $c_1, \ldots, c_{2g}$ des lacets de X en x_0 dont les classes forment une base du $\mathbf{Z}$-module libre $\tilde{G}$ (chap. 0, § 5, théorème 3).

Pour tout entier j compris entre 1 et $2g$, il existe par dualité un élément u_j de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ tel que

$$\int_{c_k} u_j = \delta_{jk}$$

pour tout entier k compris entre 1 et $2g$ (chap. 0, § 5, théorème 2, corollaire 2).

Désignons encore par $v_1, \ldots, v_g$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ des formes différentielles holomorphes. On pose

$$\omega_{jk} = \int_{c_k} v_j \qquad \text{et} \qquad \Omega = (\omega_{jk})_{1 \leq j \leq g, 1 \leq k \leq 2g} \, .$$

Remarquons que l'on a par définition

$$v_j = \sum_{1 \leq k \leq 2g} \omega_{jk} u_k \, .$$

Autrement dit, la matrice ${}^t\Omega$ est la matrice de l'application α exprimée dans les bases $v_1, \ldots, v_g$ et $u_1, \ldots, u_{2g}$.

LEMME 4. *Les vecteurs colonnes de* Ω *engendrent un réseau de* $\mathbf{C}^g$.

Tout vecteur $(z_1, \ldots, z_g)$ de $\mathbf{C}^g$ tel que le vecteur

$$(z_1, \ldots, z_g)\, \Omega$$

soit réel est nul. En effet, cette condition signifie que la forme différentielle holomorphe

$$z_1 v_1 + \ldots + z_g v_g$$

est réelle. L'assertion est donc une conséquence des lemmes 3 et 1.

Le tore complexe de dimension g défini par la matrice Ω s'appelle la *variété de Jacobi de* X et se désigne par **Jac** (X). On notera que cette variété est définie à isomorphisme près par le choix d'une base de $\tilde{G}$ et d'une base de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$.

Pour tout couple (j, k) d'entiers compris entre 1 et $2g$, on pose

$$\lambda_{jk} = \int_X u_j \wedge u_k \qquad \text{et} \qquad \Lambda = (\lambda_{jk})_{1 \leq j,k \leq 2g} \, .$$

La matrice Λ n'est autre que la matrice d'intersection de X (chap. 0, § 5, remarque 3). Elle appartient donc à $G(2g; \mathbf{Z})$.

THÉORÈME 1 (Riemann). *(1) La matrice $\Omega \Lambda {}^t\Omega$ est nulle (égalités de Riemann).*

(2) La matrice hermitienne $i\Omega\Lambda {}^t\overline{\Omega}$ est positive non dégénérée (inégalités de Riemann).

Conservons les notations précédentes. Pour tout couple d'entiers (j, k) compris entre 1 et g, la forme différentielle $v_j \wedge v_k$ est identiquement nulle (puisque de bidegré (2, 0)). On a donc

$$0 = \int_X v_j \wedge v_k = \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} \omega_{jp}\, \omega_{kq} \int_X u_p \wedge u_q = \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} \omega_{jp}\, \lambda_{pq}\, \omega_{kq}$$

ce qui démontre la première assertion.

Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, la forme différentielle $iv \wedge \bar{v}$ est positive (ceci se vérifie aisément dans une carte). Désignons par $z_1, \ldots, z_g$ les coordonnées de v dans la base $v_1, \ldots, v_g$. Les formes différentielles $u_1, \ldots, u_{2g}$ étant réelles, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant i \int_X v \wedge \bar{v} &= \sum_{1 \leq j,k \leq g} z_j \bar{z}_k\, i \int_X v_j \wedge \bar{v}_k \\ &= \sum_{1 \leq j,k \leq g} \ \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} i z_j \omega_{jp} \lambda_{pq} \overline{\omega}_{kq} \bar{z}_k \end{aligned}$$

L'égalité ne pouvant apparaître que si v est nulle, ceci démontre la seconde assertion.

Désignons par Ω' la matrice de β dans la base $u_1, \ldots, u_{2g}$ et dans une base quelconque de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. Cette matrice est de rang g et l'on a

$$\Omega' \cdot {}^t\Omega = 0\,.$$

De plus, les vecteurs colonnes de Ω' engendrent un réseau de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ et le quotient de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ par ce réseau n'est autre que $\mathbf{Pic}(X)$ (en effet, les vecteurs colonnes de Ω' sont les images par β des éléments $u_1, \ldots, u_{2g}$).

LEMME 5. *Les variétés* **Pic** (X) *et* **Jac** (X) *sont isomorphes.*

Posons

$$P = i\,\Omega \Lambda {}^t\overline{\Omega} \qquad \text{et} \qquad Q = \Omega'' \overline{\Omega}\,.$$

La matrice P est inversible (inégalités de Riemann). Montrons qu'il en est de même de Q. Les égalités de Riemann montrent que l'on a

$$\Omega' \, {}^t\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix} = (\Omega' {}^t\Omega \quad \Omega' {}^t\overline{\Omega}) = (0 \quad \Omega' {}^t\overline{\Omega})$$

d'où l'assertion puisque Ω' est de rang g et $({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega})$ de rang $2g$. On a alors

$$\begin{pmatrix} \Omega' \\ \overline{\Omega'} \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega' \\ \overline{\Omega'} \end{pmatrix} ({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega}) = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ \overline{Q} & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$${}^t\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{Q}^{-1} \\ Q^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega' \\ \overline{\Omega'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1} \, \overline{\Omega'} \\ Q^{-1} \, \Omega' \end{pmatrix}$$

Posons

$$M = iQP^{-1} .$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$M\Omega\Lambda = M\Omega\Lambda({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega}) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1} \, \overline{\Omega'} \\ Q^{-1} \, \Omega' \end{pmatrix} = M(0 \quad -iP) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1} \, \overline{\Omega'} \\ Q^{-1} \, \Omega' \end{pmatrix} = \Omega'$$

ce qui démontre l'assertion.

Notons qu'un isomorphisme υ de **Jac** (X) sur **Pic** (X) est induit par l'isomorphisme de $\mathbf{C}^g$ sur lui-même associé à la matrice M.

Pour tout point x de X, on désigne par ξ_x le fibré principal associé au diviseur $1 \cdot x$. On définit une application Ξ de X dans **Pic** (X) en posant

$$\Xi(x) = \xi_x \, \xi_{x_0}^{-1} .$$

Par définition même, la classe dans **Jac** (X) du vecteur

$$(\textstyle\int_c v_1, \ldots, \int_c v_g)$$

ne dépend pas du chemin c joignant x_0 à x. Cette classe se désigne par $Y(x)$. On définit ainsi une application Y de X dans **Jac** (X).

LEMME 6. *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "Y"'] \arrow[dr, "\Xi"] & \\ \mathbf{Jac}\,(X) \arrow[rr, "\upsilon"] & & \mathbf{Pic}\,(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Soit c un chemin joignant x_0 à un point x de X. Le fibré principal $\Xi(x)$ est associé au diviseur $1 \cdot x - 1 \cdot x_0$. Il existe donc une forme différentielle w dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) L'image par θ de la classe de w est le fibré principal $\Xi(x)$.

(2) Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, on a

$$\int_X v \wedge w = \int_c v$$

(§ 2, lemme 1). Il existe d'autre part une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que la forme $w + d''f$ soit fermée (§ 1, proposition 1). On a alors

$$w + d''f = \sum_{1 \leq j \leq 2g} w_j u_j$$

où $w_1, \ldots, w_{2g}$ sont des nombres complexes. Pour tout entier j compris entre 1 et g, on a

$$\int_c v_j = \int_X v_j \wedge w = \int_X v_j \wedge (w + d''f) = \sum_{1 \leq k \leq 2g} w_k \int_X v_j \wedge u_k$$
$$= \sum_{1 \leq k, l \leq 2g} w_k\, \omega_{jl}\, \lambda_{lk}$$

Ceci montre que $Y(x)$ est la classe dans **Jac** (X) du vecteur $\Omega\Lambda(w + d''f)$. Avec les notations du lemme 5, on a donc

$$\Omega\Lambda(w + d''f) = \Omega\Lambda({}^t\Omega \ {}^t\overline{\Omega}) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega}' \\ Q^{-1}\,\Omega' \end{pmatrix} (w + d''f)$$
$$= (0 \quad -iP) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega}' \\ Q^{-1}\,\Omega' \end{pmatrix} (w + d''f) = M^{-1}\Omega'(w + d''f)$$

et l'on conclut en remarquant que la classe de $\Omega'(w + d''f)$ dans **Pic** (X) n'est autre que $\Xi(x)$.

LEMME 7. *Soit* π *un fibré en droites holomorphe sur* X *associé à un diviseur de la forme* $1 \cdot x$. *Si* g *est au moins égal à* 1, *la dimension de* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *est égale à* 1.

Supposons qu'il existe deux sections holomorphes s_0 et s_1 de π linéairement indépendantes et considérons l'application holomorphe $(s_0 : s_1)$ de X dans $\mathbf{P}^1$. Pour tout couple (λ_0, λ_1) de nombres complexes non tous deux nuls, la section $\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ possède un zéro et un seul. En effet, son ordre est égal à la classe de Chern de π. On en déduit aisément que l'application $(s_0 : s_1)$ est un isomorphisme (chap. I, § 4, proposition 1, corollaire), ce qui démontre l'assertion.

LEMME 8. *Si* g *est au moins égal à* 1, *les formes différentielles holomorphes sur* X *n'ont pas de zéro commun.*

Pour tout point x de X il existe un fibré en droites holomorphe π sur X et une section holomorphe s de π dont le diviseur associé est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de Riemann-Roch et du lemme 7 que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = g - 1 .$$

D'autre part, l'application $\otimes\, s$ induit un isomorphisme de $\mathbf{H}^0\,(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ sur l'espace $L\,(1 \cdot x)$ des formes différentielles holomorphes qui s'annulent au point x. On en déduit que $L\,(1 \cdot x)$ est distinct de $\mathbf{H}^0\,(X, \Omega^{1,0})$ ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 2. *Si* g *est au moins égal à* 1, *l'application canonique* Ξ *de* X *dans* **Pic** (X) *est un plongement.*

Conservons les notations précédentes. Soit U un ensemble ouvert simplement connexe dans X. Il existe des fonctions holomorphes $h_1, \ldots, h_g$ sur U telles que

$$v_1 \,|_U = dh_1, \ldots, v_g \,|_U = dh_g .$$

L'application holomorphe $(h_1, \ldots, h_g)$ de U dans $\mathbf{C}^g$ est un relèvement de $Y|_U$. Ceci montre déjà que Y (et par conséquent Ξ) est holomorphe et de rang 1 (lemme 8).

Montrons que Ξ est injective. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux points distincts x et y de X tels que ξ_x et ξ_y coïncident. Désignons par π un fibré en droites holomorphe correspondant au fibré principal ξ_x. La dimension de $\mathbf{H}^0\,(X, \pi)$ est au moins égale à 2 ce qui est absurde (lemme 7).

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre* 1 *est une courbe elliptique.*