# §3. Le cas du Laplacien

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

(chap. II, § 2, théorème 2). L'assertion est alors une conséquence immédiate d'un résultat classique sur les opérateurs compacts ([2], théorème (11.3.2) et problème (11.3.2)).

COROLLAIRE (Théorème de finitude). *Si la courbe holomorphe* $X$ *est compacte, l'image de l'opérateur*

$$d'' : H^1(X, \pi) \to L^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée. Les espaces* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont alors canoniquement isomorphes et les espaces* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *sont de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et du théorème de dualité.

## § 3. LE CAS DU LAPLACIEN

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

Soit $X$ un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction $u$ de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{C})$ est *harmonique* si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 .$$

Il résulte de cette définition que $u$ est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

On désigne par $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ (avec $\mathbf{k}$ égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) l'ensemble des fonctions harmoniques sur $X$ à valeurs dans $\mathbf{k}$.

Remarquons que $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{k})$.

PROPOSITION 1. *Supposons* $X$ *simplement connexe. Pour qu'une fonction* $u$ *de* $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ *soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

La suffisance résulte de ce qui précède. Si $u$ est harmonique, la forme différentielle $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ est holomorphe, donc fermée. Il existe par conséquent une fonction holomorphe $h$ sur $X$ telle que

$$\frac{1}{2} dh = \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

(chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 1). On en déduit que

$$\frac{1}{2}\, d(h+\bar{h}) = \frac{\partial u}{\partial z}\, dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} = du$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1 (Principe du prolongement analytique). *Soit $u$ une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe $X$ de $\mathbf{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(1) La fonction $u$ est identiquement nulle.*

*(2) Il existe un point de $X$ ou le germe de $u$ est nul.*

*(3) Il existe un point de $X$ où toutes les dérivées partielles de $u$ sont nulles.*

Il suffit de montrer que (3) implique (1). On peut supposer $u$ à valeurs réelles. On désigne par $\zeta$ un point de $X$ où toutes les dérivées partielles de $u$ sont nulles et par $h$ une fonction holomorphe telle que

$$u = \operatorname{Re}(h) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial z}$$

au voisinage de $\zeta$. On en déduit que $h$ est constante, purement imaginaire, et que $u$ est nulle au voisinage de $\zeta$, ce qui établit l'assertion.

COROLLAIRE 2 (Propriété de la moyenne). *Soit $u$ une fonction harmonique sur un ensemble ouvert $X$ de $\mathbf{C}$ et soit $D$ un disque de centre $\zeta$ relativement compact dans $X$. On a*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} u(z)\, dz \, .$$

On peut supposer $u$ à valeurs réelles. L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition 1 et de la formule de Cauchy (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 1).

COROLLAIRE 3. *Pour tout ensemble ouvert $X$ de $\mathbf{C}$, les topologies induites sur $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ par $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{k})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{k})$ coïncident.*

La démonstration est analogue à celle du théorème de Weierstrass (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

COROLLAIRE 4 (Principe du maximum). *Soit $u$ une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe $X$ de $\mathbf{C}$. Si $u$ possède un maximum relatif en un point $\zeta$ de $X$, elle est constante.*

En vertu du principe du prolongement analytique, il suffit de montrer que $u$ est constante au voisinage de $\zeta$. Quitte à multiplier $u$ par une constante convenable, on peut supposer $u(\zeta)$ réel positif. Pour $r$ suffisamment petit, on a par hypothèse

$$M(r) = \sup_{|z-\zeta|=r} |u(z)| \leqslant u(\zeta).$$

Réciproquement, la propriété de moyenne montre que $u(\zeta)$ est majoré par $M(r)$. Ceci montre que la fonction $g$ définie par

$$g(z) = \operatorname{Re}\big(u(\zeta) - u(z)\big)$$

est réelle positive. Elle s'annule en un point $z$ si et seulement si $u(z)$ est égal à $u(\zeta)$. On conclut en remarquant que l'intégrale de $g$ sur le bord du disque de centre $\zeta$ et de rayon $r$ est nulle.

Lemme 1. *Soit $l$ la fonction définie sur* $\mathbf{C}^*$ *par la formule*

$$l(z) = \frac{1}{\pi} \log |z|^2 .$$

*(1) La fonction $l$ appartient à* $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

*(2) La fonction $l$ est faiblement dérivable d'ordre* $(1, 0)$ *et* $(0, 1)$. *On a*

$$\frac{\partial l}{\partial z} = \frac{1}{\pi z} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial l}{\partial \bar z} = \frac{1}{\pi \bar z}.$$

La première assertion découle d'un calcul élémentaire en coordonnées polaires. Démontrons la seconde. Pour toute fonction $h$ de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, on a

$$\int_{\mathbf{C}} kh\, d\mu = -\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{C} \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial l}{\partial z} h\, dz \wedge d\bar z$$

(on utilise les notations du paragraphe 1). La formule de Stokes montre alors que l'on a

$$\int_{\mathbf{C}} kh\, d\mu = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh\, d\bar z + \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{C}} l \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge d\bar z .$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh\, d\bar z = 0 .$$

L'autre assertion se démontre de la même manière.

Désignons par $D$ le disque de centre 0 et de rayon $r$ dans $\mathbf{C}$ et par $\alpha$ une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty$ (D, **R**) égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \qquad \beta = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial \bar{z}}\,.$$

Si $X$ et $X'$ sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$ tels que $X$ contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha l)*\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\beta l)*\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$$

Proposition 2. *Le produit de convolution induit une application linéaire continue*

$$(\alpha l)*\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^2_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$$

*et l'on a*

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha'\bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

*pour toute fonction* $u$ *de* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Il résulte du lemme 1 que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z}\big((\alpha l)*u\big) = (\alpha' l)*u + (\alpha k)*u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = (\alpha'' l)*u + (\alpha \bar{k})*u\,.$$

La première assertion résulte donc du lemme de Grothendieck. Ce même lemme montre que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha'\bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit $X$ une courbe holomorphe.

On désigne par $\mathscr{H}^0(X)$ et $\mathscr{H}^1(X)$ le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d''\colon\ \mathscr{C}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}(X, \Omega^{1,1})\,,$$

par $\mathscr{H}^0_c(X)$ et $\mathscr{H}^1_c(X)$ le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d''\colon\ \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}_c(X, \Omega^{1,1})\,.$$

Remarquons que l'ensemble $\mathscr{H}^0(X)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions harmoniques sur $X$ (i.e. les fonctions dont l'expression dans toute carte est harmonique). En particulier, l'espace $\mathscr{H}^0(X)$ est réduit aux fonctions localement constantes si $X$ est compacte (principe du maximum), l'espace $\mathscr{H}^0_c(X)$ est nul si $X$ est ouverte (principe du prolongement analytique).

On peut développer pour l'opérateur $d' \cdot d''$ une théorie semblable à celle développée aux paragraphes précédents pour l'opérateur $d''$. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats: les démonstrations sont laissées en exercice au lecteur.

Théorème 1. *On désigne par* $u$ *une fonction de* $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ *et par* $m$ *un entier naturel. S'il existe une forme différentielle* $v$ *de* $H^m_{\text{loc}}(X, \Omega^{1,1})$ *telle que*

$$\int_X hv = \int_X u\,(d' \cdot d'')(h)$$

*pour toute fonction* $h$ *de* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$, *alors* $u$ *appartient à* $H^{m+2}_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Corollaire (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 1. Si* $v$ *est indéfiniment dérivable, il en est de même de* $u$. *En particulier, si* $v$ *est nulle, la fonction* $u$ *est harmonique.*

On appelle *paramétrix de* $d' \cdot d''$ toute application linéaire continue $P$ de $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega^{1,1})$ dans $H^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ vérifiant les conditions suivantes

(1) Pour toute forme différentielle $u$ de $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega^{1,1})$, la forme différentielle

$$u - (d' \cdot d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) Si $u$ est à support compact, il en est de même de $P(u)$.

Les propriétés suivantes sont alors des conséquences du théorème de régularité:

(3) Si $u$ est indéfiniment dérivable, il en est de même de $P(u)$.

(4) Pour toute fonction $v$ de $H^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$, la fonction

$$v - (P \cdot d' \cdot d'')(u)$$

est indéfiniment dérivable.

Théorème 2. *L'opérateur* $d' \cdot d''$ *possède une paramétrix.*

Corollaire. *(1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de* $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ *et* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ *dans* $H^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ *et* $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega^{1,1})$

*respectivement induisent des bijections de* $\mathscr{H}^0(X)$ *et* $\mathscr{H}^1(X)$ *sur le noyau et le conoyau de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) .$$

*(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$ *et* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^{1,1})$ *dans* $H^2_c(X, \mathbf{C})$ *et* $L^2_c(X, \Omega^{1,1})$ *respectivement induisent des bijections de* $\mathscr{H}^0_c(X)$ *et* $\mathscr{H}^1_c(X)$ *sur le noyau et le conoyau de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1}) .$$

Considérons les dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques

$$\Delta : L^2_c(X, \Omega^{1,1}) \times L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

et

$$\Delta : L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) \times L^2_c(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C} .$$

L'ensemble des fonctions harmoniques (resp. harmoniques à support compact) sur $X$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ (resp. $L^2_c(X, \mathbf{C})$).

PROPOSITION 3. *Pour qu'une forme différentielle* $u$ *de* $L^2_c(X, \Omega^{1,1})$ *(resp.* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$*) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1})$$
$$(\textit{resp. } d' \cdot d'' : H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})),$$

*il faut et il suffit qu'elle soit* $\Delta$*-orthogonale au sous-espace* $\mathscr{H}^0(X)$ *(resp.* $\mathscr{H}^0_c(X)$*).*

THÉORÈME 3 (Théorème de dualité). *(1) Si l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels* $\mathscr{H}^1_c(X)$ *et* $\mathscr{H}^0(X)'$ *sont canoniquement isomorphes.*

*(2) Si l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels* $\mathscr{H}^1(X)$ *et* $\mathscr{H}^0_c(X)'$ *sont canoniquement isomorphes.*

*Remarque 1.*

Pour toute partie compacte $K$ de $X$, l'application

$$(j_1, j_2 \cdot d'', d' \cdot d''): \ H^2_K(X, \mathbf{C}) \to L^2_K(X, \mathbf{C}) \oplus L^2_K(X, \Omega^{0,1}) \oplus L^2_K(X, \Omega^{1,1})$$

où $j_1$ et $j_2$ désignent les injections canoniques de $H^2_K(X, \mathbf{C})$ dans $L^2_K(X, \mathbf{C})$ et de $H^1_K(X, \Omega^{0,1})$ dans $L^2_K(X, \Omega^{0,1})$ respectivement, est injective d'image fermée (§ 1, lemme 1).

PROPOSITION 4. *Pour toute partie compacte $K$ de $X$, l'opérateur*

$$d' \cdot d'': \ H^2_K(X, \mathbf{C}) \to L^2_K(X, \Omega^{1,1})$$

*a une image fermée et un noyau de dimension finie.*

*En particulier, si $X$ est compacte connexe, l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme de $\mathscr{H}^1(X)$ sur* $\mathbf{C}$.