§1. Convolution

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

CHAPITRE II

COMPLÉMENTS D'ANALYSE

§ 1. CONVOLUTION

Désignons par X, X' et X'' des ensembles ouverts de $\mathbf{R}^n$, par K, K' et K'' des ensembles compacts de X, X' et X'' respectivement. On suppose que X' contient l'ensemble

$$X - X'' = \{ t \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } x \in X \text{ et } y \in X'' \text{ tels que } t = x - y \}$$

et que K' contient l'ensemble

$$K - K'' = \{ t \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } x \in K \text{ et } y \in K'' \text{ tels que } t = x - y \} .$$

Pour toute fonction u de $\mathscr{C}^0(X', \mathbf{C})$, toute fonction v de $\mathscr{C}^0_c(X'', \mathbf{C})$ et tout point x de X, on pose

$$(u*v)(x) = \int_{X''} u(x-y)\, v(y)\, d\mu(y) = \int_{X'} u(y)\, v(x-y)\, d\mu(y) = (v*u)(x)$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$. Il est clair que $u*v$ est une fonction continue et on a l'inégalité

$$\| u*v \|_{L^1,K} \leqslant \| u \|_{L^1,K'} \| v \|_{L^1,K''} .$$

En particulier, l'application bilinéaire

$$* : \quad \mathscr{C}^0(X', \mathbf{C}) \times \mathscr{C}^0_c(X'', \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(X, \mathbf{C})$$

se prolonge de manière unique en une application bilinéaire séparément continue (et même hypocontinue)

$$* : \quad L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^1_c(X'', \mathbf{C}) \to L^1_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$$

que l'on appelle le *produit de convolution*.

Pour toute fonction u de $L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ et toute fonction v de $L^1_c(X'', \mathbf{C})$, le support de $u*v$ est contenu dans l'ensemble

$$X \cap \big(\operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)\big) .$$

En particulier, le produit de convolution induit une application bilinéaire

$$* : \quad L^1_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times L^1_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to L^1_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) .$$

PROPOSITION 1. *Pour tout couple* (p, q) *d'éléments conjugués de* $[1, \infty]$, *toute fonction* u *de* $L^p_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ *et toute fonction* v *de* $L^q_{K''}(X'', \mathbf{C})$, *on a*

$$\| u*v \|_{L^\infty, K} \leqslant \| u \|_{L^p, K'} \| v \|_{L^q, K''} .$$

On peut supposer u et v continues. Il résulte de l'inégalité de Hölder ([5], théorème (3.8)) que l'on a

$$| (u*v)(x) | \leqslant \int_{K'} | u(y) v(x-y) | \, d\mu(y) \leqslant \| u \|_{L^p, K'} \quad \| v \|_{L^q, K''}$$

pour tout point x de K, ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1. *Désignons par* u *une fonction de* $L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ *et par* v *une fonction de* $L^1_c(X'', \mathbf{C})$. *Si l'une des deux est continue, il en est de même de* $u*v$.

Supposons par exemple u continue et le support de v contenu dans K''. Pour toute fonction h de $\mathscr{C}^0_{K''}(X'', \mathbf{C})$, la fonction $u*h$ est continue et l'on a

$$\| u*h \|_{L^\infty, K} \leqslant \| u \|_{L^1, K'} \quad \| h \|_{L^\infty, K''} .$$

Ceci montre que $u*v$ est limite dans $L^\infty_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ d'une suite de fonctions continues, d'où l'assertion.

COROLLAIRE 2. *Pour tout couple* (p, q) *d'éléments conjugués de* $[1, \infty]$, *le produit de convolution induit une application bilinéaire*

$$* : \quad L^p_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^q_c(X'', \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(X, \mathbf{C}) .$$

COROLLAIRE 3. *Désignons par* u *une fonction de* $L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$, *par* v *une fonction de* $L^1_c(X'', \mathbf{C})$ *et par* m *un entier naturel (ou le symbole* ∞*). Si l'une des fonctions est* m*-fois continûment dérivable, il en est de même de* $u*v$ *et l'on a*

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v \qquad (\text{resp. } D^\alpha(u*v) = u*(D^\alpha v))$$

pour tout multi-indice α *de longueur au plus* m.

La démonstration est analogue à celle du corollaire 1. Elle est laissée en exercice au lecteur.

PROPOSITION 2. *Pour tout élément* p *de* $[1, \infty]$, *toute fonction* u *de* $L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ *et toute fonction* v *de* $L^p_{K''}(X'', \mathbf{C})$, *on a*

$$\| u*v \|_{L^p, K} \leqslant \| u \|_{L^1, K'} \quad \| v \|_{L^p, K''} .$$

On peut supposer que p et son conjugué q sont réels et que les fonctions u et v sont continues. Pour toute fonction h de $L^q_K(X, \mathbf{C})$, le théorème de Fubini montre que l'on a

$$|\int_X (u*v)\, h d\mu| \leqslant \int_{K\times K'} |u(y)\, v(x-y)\, h(x)|\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

et l'inégalité de Hölder implique la relation

$$|\int_X (u*v)\, h d\mu| \leqslant \|u\|_{L^1,K'} \quad \|v\|_{L^p,K'} \quad \|h\|_{L^q,K}.$$

En particulier, si h est la fonction définie par

$$\begin{cases} h(x) = \overline{(u*v)(x)}\, |(u*v)(x)|^{p-2} & \text{si } x\in K \text{ et } (u*v)(x)\neq 0 \\ h(x) = 0 & \text{si } x\notin K \text{ ou } (u*v)(x) = 0\,, \end{cases}$$

on a

$$\|h\|_{L^q,K} = (\int_K |u*v|^p d\mu)^{1/q} = \|u*v\|^{p/q}_{L^p,K}.$$

Par conséquent,

$$\|u*v\|^p_{L^p,K} = \int_X (u*v)\, h d\mu \leqslant \|u\|_{L^1,K'} \|v\|_{L^p,K''} \quad \|u*v\|^{p/q}_{L^p,K}$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. *Pour tout élément p de $[1, \infty]$, le produit de convolution induit des applications bilinéaires*

$$*: L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^p_c(X'', \mathbf{C}) \to L^p_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$$

et

$$*: L^p_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^1_c(X'', \mathbf{C}) \to L^p_{\text{loc}}(X, \mathbf{C}).$$

Munissons l'espace numérique $\mathbf{R}^n$ de la norme $|\ |$ définie par

$$|(x_1, \ldots, x_n)| = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$

On appelle *fonction marteau sur* $\mathbf{R}^n$ toute fonction ϕ de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à valeurs dans le segment $[0, 1]$, dont le support est contenu dans la boule unité et telle que

$$\|\phi\|_{L^1,\mathbf{R}^n} = \int_{\mathbf{R}^n} \phi\, d\mu = 1.$$

De telles fonctions existent (appendice I, lemme 3). Pour tout nombre réel ε strictement positif, on désigne par ϕ_ε la fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ définie par

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Le support de ϕ_ε est contenu dans la boule de rayon ε et l'on a encore

$$\| \phi_\varepsilon \|_{L^1, \mathbf{R}^n} = 1 .$$

PROPOSITION 3. *Pour toute fonction* u *de* $\mathscr{C}^0_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *(resp.* $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$*), le produit de convolution* $u * \phi_\varepsilon$ *converge vers* u *dans* $\mathscr{C}^0_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *(resp.* $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$*) lorsque* ε *tend vers* 0.

Pour tout ensemble compact K de $\mathbf{R}^n$, on pose

$$K_\varepsilon = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } | y - x | \leqslant \varepsilon \} .$$

Pour tout point x de K, on a la relation

$$u(x) - (u * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{K_\varepsilon} (u(x) - u(y)) \, \phi_\varepsilon(x - y) \, d\mu(y)$$

et l'assertion résulte immédiatement de la continuité uniforme de u sur K_ε.

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle* X *et tout fibré vectoriel complexe* π *sur* X, *l'ensemble* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ *est dense dans les espaces* $\mathscr{C}^0_c(X, \pi)$ *et* $\mathscr{C}^0(X, \pi)$.

PROPOSITION 4. *Pour tout nombre réel* p *au moins égal à* 1 *et toute fonction* u *de* $L^p_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *(resp.* $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$*), le produit de convolution* $u * \phi_\varepsilon$ *converge vers* u *dans* $L^p_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *(resp.* $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$*) lorsque* ε *tend vers* 0.

Pour tout ensemble compact K de $\mathbf{R}^n$ et toute fonction v de $\mathscr{C}^0_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, on a

$$\| u - u * \phi_\varepsilon \|_{L^p, K} \leqslant \| u - v \|_{L^p, K} + \| v - v * \phi_\varepsilon \|_{L^p, K} + \| (v - u) * \phi_\varepsilon \|_{L^p, K}$$

et par conséquent (proposition 2),

$$\| u - u * \phi_\varepsilon \|_{L^p, K} \leqslant \| u - v \|_{L^p, K} + \mu(K)^{1/p} \| v - v * \phi_\varepsilon \|_{L^\infty, K} + \| v - u \|_{L^p, K_\varepsilon} .$$

L'assertion est alors une conséquence de la proposition 3 et de la densité de $\mathscr{C}^0_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $L^p_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$).

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle* X, *tout fibré vectoriel complexe* π *sur* X *et tout nombre réel* p *au moins égal à* 1, *l'ensemble* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ *est dense dans les espaces* $L^p_c(X, \pi)$ *et* $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$.

Pour toute fonction w de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, toute fonction u de $\mathscr{C}^0_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ et tout point x de $\mathbf{R}^n$, on pose

$$\underline{w}(u)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} w(x, y) \, u(y) \, d\mu(y) .$$

PROPOSITION 5. *(1) La fonction* $\underline{w}(u)$ *est continue.*

(2) Si la restriction au support de w *de la deuxième projection de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^n$ *est propre, la fonction* $\underline{w}(u)$ *est à support compact.*

(3) Pour tout ensemble compact K' *de* $\mathbf{R}^n$ *et tout ensemble compact* K'' *de* $\mathbf{R}^n$ *contenant le support de* u, *on a*

$$\| \underline{w}(u) \|_{L^2, K'} \leqslant \| w \|_{L^2, K' \times K''} \| u \|_{L^2, K''} .$$

Les deux premières assertions résultent immédiatement des définitions, la troisième de l'inégalité de Hölder.

COROLLAIRE. *L'application bilinéaire*

$$N : \quad \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times \mathscr{C}^0_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

définie par

$$N(w, u) = \underline{w}(u)$$

se prolonge de manière unique en une application bilinéaire séparément continue (et même hypocontinue)

$$N : \quad L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times L^2_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) .$$

Pour toute fonction w de $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, l'application linéaire continue

$$N(w, \ ) : L^2_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

s'appelle l'*opérateur de noyau* w.

PROPOSITION 6. *On désigne par* w *une fonction de* $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, *par* K' *et* K'' *des ensembles compacts de* $\mathbf{R}^n$ *vérifiant la relation*

$$\operatorname{supp}(w) \cap (\mathbf{R}^n \times K') \subset K'' \times K' .$$

L'opérateur de noyau w *induit alors un opérateur compact* [1]) *de* $L^2_{K'}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ $L^2_{K''}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.

Désignons par $\| \underline{w} \|$ la norme de l'opérateur $\underline{w}$ dans l'espace de Banach des applications linéaires continues de $L^2_{K'}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $L^2_{K''}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. On a l'inégalité

$$\| \underline{w} \| \leqslant \| w \|_{L^2, K' \times K''}$$

et puisque les opérateurs compacts forment un sous-espace fermé de cet espace de Banach ([2], théorème (11.2.10)), on se ramène aussitôt au cas où w est la fonction caractéristique d'un pavé de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. L'image de $\underline{w}$

[1]) Ceci signifie que l'image de la boule unité est un ensemble relativement compact.

est alors un sous-espace vectoriel de dimension 1, ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. *On désigne par* u *une fonction de* $L^1_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, *par* K' *et* K'' *des ensembles compacts de* $\mathbf{R}^n$ *vérifiant la relation*

$$\operatorname{supp}(u) + K' \subset K''.$$

Le produit de convolution $u*$ *induit alors un opérateur compact de* $L^2_{K'}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *dans* $L^2_{K''}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.

La norme de l'opérateur $u*$ vérifie la relation

$$\| u* \| \leqslant \| u \|_{L^1, \mathbf{R}^n}.$$

Comme dans la proposition 6, on se ramène immédiatement au cas où u appartient à $\mathscr{C}^0_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. On remarque alors que $u*$ n'est autre que l'opérateur de noyau

$$w(x, y) = u(x-y)$$

et l'on applique la proposition 6.

§ 2. ESPACES DE SOBOLEV

On désigne par X un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et par α un multi-indice de $\mathbf{N}^n$. On dit qu'une fonction u de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ est *faiblement dérivable d'ordre* α s'il existe une fonction v de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ vérifiant la relation

$$\int_X hv \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_X u D^\alpha h \, d\mu$$

pour toute fonction h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$. Si elle existe, une telle fonction v est unique (chap. 0, § 4, lemme 2 et chap. II, § 1, proposition 4, corollaire). On l'appelle la *dérivée faible d'ordre* α *de* u.

LEMME 1. *On désigne par* X *un pavé ouvert*

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n$$

de $\mathbf{R}^n$ *et par* u *une fonction de* $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. *On suppose que l'on a*

$$\int_X u \frac{\partial h}{\partial x_1} \, d\mu = 0$$

pour toute fonction h *de* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$. *La fonction* u *est alors indépendante de* x_1. *De manière plus précise, pour presque tout point* $(x_2, \ldots, x_n)$ *de*