§3. Fonctions méromorphes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

et si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}_c^0(X, \pi)$ est nul (principe du prolongement analytique).

On prendra garde de ne pas confondre le groupe de cohomologie de de Rham $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ de la variété différentielle $X^{\mathbf{R}}$ (chap. 0, § 4) et le groupe de cohomologie de Dolbeault $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}_X)$ du fibré produit $\mathbf{C}_X$.

§ 3. Fonctions méromorphes

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété holomorphe et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Lemme 1. *On suppose X connexe et l'on désigne par f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur X. L'ensemble V défini par*

$$V = \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}$$

est alors connexe et dense dans X.

Il suffit de montrer que tout point x_0 de X possède un voisinage U tel que $V \cap U$ soit connexe et dense dans U.

On peut donc supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$ et, par un changement linéaire affine de coordonnées, on peut également supposer que x_0 est l'origine et que la fonction partielle $f(0, \ldots, 0, z_n)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0. Désignons par D'' un disque fermé de centre 0 dans $\mathbf{C}$ tel que $f(0, \ldots, 0, z_n)$ soit holomorphe au voisinage de D'' et ne s'annule pas sur $\partial D''$ (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Par continuité, il existe un nombre réel ε strictement positif tel que f soit holomorphe au voisinage de $D' \times D''$ et ne s'annule pas sur $D' \times \partial D''$, en désignant par D' le polydisque de $\mathbf{C}^{n-1}$ défini par

$$D' = \{ (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} \mid \max_{1 \leq j \leq n-1} |z_j| \leqslant \varepsilon \}.$$

L'ensemble $V \cap (D' \times D'')$ est connexe et dense dans $D' \times D''$ comme il résulte aussitôt de la formule

$$V \cap (D' \times D'') = (D' \times \partial D'') \cup \bigcup_{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in D'} \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid f(z_1, \ldots, z_n) \neq 0 \}.$$

Pour tout point x de X, l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes en x de fonctions holomorphes est intègre (§ 1, proposition 1, corollaire 2) et l'ensemble $\mathcal{O}(\pi)_x$

des germes en x de sections holomorphes de π est un $\mathcal{O}_x$-module. On désigne par $\mathcal{K}_x$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_x$ et l'on pose

$$\mathcal{K}(\pi)_x = \mathcal{K}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(\pi)_x .$$

Tout élément de $\mathcal{K}(\pi)_x$ s'écrit comme quotient d'un élément de $\mathcal{O}(\pi)_x$ par un élément non nul de $\mathcal{O}_x$.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \mathcal{K}(\pi)_x$ sur X. Pour éviter des confusions, on désigne par u_x l'image du point x de X. On dit que u est une *section méromorphe de* π si elle vérifie la condition suivante:

(M) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert connexe U de x_0, une section holomorphe s de π sur U et une fonction holomorphe f non nulle sur U tels que

$$u_x = \frac{s_x}{f_x}$$

pour tout point x de U.

On désigne par $\mathcal{K}(X, \pi)$ l'ensemble des sections méromorphes de π et par $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur X (i.e. les sections méromorphes du fibré produit $\mathbf{C}_X$). On vérifie aisément que l'addition et la multiplication point par point définissent sur $\mathcal{K}(X)$ une structure d'anneau commutatif avec élément unité et sur $\mathcal{K}(X, \pi)$ une structure de $\mathcal{K}(X)$-module.

La restriction à un ensemble ouvert d'une section méromorphe est une section méromorphe. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathcal{K}(U, \pi) \to \mathcal{K}(\pi)_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédiatement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'une section méromorphe à sa valeur au point x.

On dit qu'une section méromorphe u de π est *régulière au point* x si u_x appartient à $\mathcal{O}(\pi)_x$. On appelle *domaine de régularité de* u l'ensemble $R(u)$ des points où u est régulière. Les points n'appartenant pas au domaine de régularité s'appellent les *pôles de* u.

LEMME 2. *Supposons X connexe. Le domaine de régularité d'une section méromorphe u de π est un ensemble ouvert, connexe et dense dans X.*

Soit x_0 un point de X. On désigne par U un voisinage ouvert connexe de x_0, par s une section holomorphe de π sur U et par f une fonction holomorphe non nulle sur U tels que

$$u_x = \frac{s_x}{f_x}$$

pour tout point x de U. Si u est régulière au point x_0, on peut supposer que f ne s'annule pas sur U ce qui montre déjà que $R(u)$ est ouvert. Si u n'est pas régulière au point x_0, l'ensemble

$$V = \{ x \in U \mid f(x) \neq 0 \}$$

est connexe et dense dans U (lemme 1), d'où l'assertion puisqu'il est contenu dans $R(u)$.

Pour toute section méromorphe u de π et pour tout point x de $R(u)$, on pose

$$\tilde{u}(x) = u_x(x) .$$

Ceci a bien un sens puisque u_x appartient à $\mathcal{O}(\pi)_x$. Il est clair que $\tilde{u}$ est une section holomorphe de π sur $R(u)$. On dit qu'elle est *associée à* u.

PROPOSITION 1 (Principe du prolongement analytique). *Supposons X connexe et soient u et v deux sections méromorphes de π. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Les sections u et v coïncident partout.

(2) Les sections u et v coïncident sur $R(u) \cap R(v)$.

(3) Les germes de u et v coïncident en un point.

Il suffit de montrer que (3) implique (1). Désignons par V l'ensemble des points de X où les germes de u et v coïncident. Puisqu'il est ouvert, il suffit de montrer qu'il est fermé. Tout point x_0 de $\overline{V}$ possède un voisinage ouvert connexe U tel que

$$u \mid_U = \frac{s}{f} \quad \text{et} \quad v \mid_U = \frac{t}{g} ,$$

et puisque les germes u_x et v_x coïncident en un point x de U, le principe du prolongement analytique (§ 1, proposition 1, corollaire 2) montre que l'on a

$$gs = ft$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Si X est connexe, l'anneau $\mathcal{K}(X)$ des fonctions méromorphes sur X est un corps.*

Désignons par u une fonction méromorphe non nulle sur X. Il résulte de la proposition 1 que u_x n'est jamais nul. On vérifie aisément que les

germes u_x^{-1} définissent une fonction méromorphe sur X ce qui démontre l'assertion.

Remarque 1.

Supposons X connexe et désignons par s une section holomorphe de π sur un ensemble ouvert non vide U de X. La proposition 1 montre qu'il existe au plus une section méromorphe de π dont le domaine de régularité contient U et dont la restriction coïncide avec s. S'il en existe une, on dit (abusivement) que s est une *section méromorphe de* π.

Supposons π de rang pur p. On désigne par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement de X par des domaines de cartes de π et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang p subordonné à ce recouvrement et associé à π. Les sections méromorphes de π sont en correspondance biunivoque avec les familles $(u_\iota)_{\iota\in I}$ où u_ι est un p-uple de fonctions méromorphes sur U_ι, vérifiant les conditions de recollement

$$u_\kappa = g_{\kappa\iota} u_\iota .$$

On appelle *forme différentielle méromorphe de degré* r toute section méromorphe de $\Omega^{r,0}$. On définit de manière évidente l'image réciproque d'une forme différentielle méromorphe par une application holomorphe.

Pour tout point x de X, on désigne par $\mathscr{Q}(\pi)_x$ le $\mathscr{O}_x$-module quotient de $\mathscr{K}(\pi)_x$ par $\mathscr{O}(\pi)_x$.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x\in X} \mathscr{Q}(\pi)_x$ sur X. Pour éviter des confusions, l'image d'un point x de X se désigne par u_x. On dit que u est une *partie principale de* π si elle vérifie la condition suivante:

(*PP*) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une section méromorphe de π sur U dont le germe représente u_x en tout point x de U.

On désigne par $\mathscr{Q}(X, \pi)$ l'ensemble des parties principales de π. L'addition et la multiplication point par point en font un $\mathscr{O}(X)$-module.

La restriction à un ensemble ouvert d'une partie principale est une partie principale. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathscr{Q}(U, \pi) \to \mathscr{Q}(\pi)_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédia-

tement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'une partie principale à sa valeur au point x.

PREMIER PROBLÈME DE COUSIN. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie principale appartienne à l'image de l'application canonique*

$$\gamma_I : \mathscr{K}(X, \pi) \to \mathscr{Q}(X, \pi).$$

Pour tout élément u de $\mathscr{Q}(X, \pi)$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et pour chaque indice ι une section méromorphe s_ι de π sur U_ι représentant $u \mid_{U_\iota}$. Par définition, la section

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

est holomorphe sur $U_\iota \cap U_\kappa$. Il existe donc pour chaque indice ι une section t_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \pi)$ telle que

$$s_{\kappa\iota} = t_\iota - t_\kappa$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). En particulier, les formes différentielles $d''t_\iota$ se recollent en une section v de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$. La forme différentielle $d''v$ est nulle et l'on vérifie aisément que la classe $\delta(u)$ de v dans $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ ne dépend que de u.

PROPOSITION 2. *La suite de $\mathscr{O}(X)$-modules et d'applications linéaires*

$$\mathscr{K}(X, \pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathscr{Q}(X, \pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X, \pi)$$

est exacte.

On conserve les notations précédentes. Si u provient d'une section méromorphe de π, on peut prendre comme recouvrement ouvert l'ensemble X lui-même et l'on voit que $\delta(u)$ est nul.

Réciproquement, supposons $\delta(u)$ nul. Ceci signifie qu'il existe une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ telle que

$$d''t = v.$$

Pour tout indice ι, la section $t_\iota - t \mid_{U_\iota}$ est holomorphe et les sections $s_\iota - t_\iota + t \mid_{U_\iota}$ se recollent en une section méromorphe de π représentant u, d'où l'assertion.

Pour tout point x de X, on désigne par $\mathscr{D}_x$ le groupe abélien quotient de $\mathscr{K}_x^*$ par $\mathscr{O}_x^*$, où $\mathscr{O}_x^*$ (resp. $\mathscr{K}_x^*$) désigne le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{O}_x$ (resp. $\mathscr{K}_x$). Ce groupe est noté additivement.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \mathscr{D}_x$ sur X. Pour éviter des confusions, l'image d'un point x de X se désigne par u_x. On dit que u est un *diviseur de* X si la condition suivante est vérifiée:

(D) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une fonction méromorphe inversible sur U dont le germe en tout point représente u_x.

On désigne par $\mathscr{D}(X)$ l'ensemble des diviseurs de X. L'addition point par point en fait un groupe abélien.

La restriction d'un diviseur à un ensemble ouvert est un diviseur. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathscr{D}(U) \to \mathscr{D}_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédiatement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'un diviseur à sa valeur au point x.

Soit π un fibré en droites holomorphe sur X. On désigne par $\mathscr{K}^*(X, \pi)$ l'ensemble des sections méromorphes de π qui ne s'annulent identiquement sur aucune composante connexe de X. Soit s une telle section. L'expression de s dans toute carte Φ de π est une fonction méromorphe inversible sur le domaine U de Φ. La classe de cette fonction dans $\mathscr{D}(U)$ est indépendante de Φ. Par recollement, on obtient ainsi un diviseur sur X que l'on dit *associé à* s et que l'on désigne par (s). On définit ainsi une application canonique

$$\gamma_{II}(\pi) : \mathscr{K}^*(X, \pi) \to \mathscr{D}(X) .$$

Deuxième problème de Cousin. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un diviseur appartienne à l'image de l'application canonique*

$$\gamma_{II} : \mathscr{K}^*(X) \to \mathscr{D}(X) .$$

Pour tout diviseur u de X, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι une fonction méromorphe inversible s_ι sur U_ι représentant $u \mid_{U_\iota}$. Par définition, la fonction

$$s_{\kappa\iota} = s_\kappa s_\iota^{-1}$$

est holomorphe inversible sur $U_\iota \cap U_\kappa$ et la famille $(s_{\kappa\iota})$ est un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à (U_ι). On vérifie aisément que sa classe $v(u)$ dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de u.

LEMME 3. *Pour tout diviseur u de X, il existe un fibré en droites holomorphe π sur X et une section méromorphe s de $\mathscr{K}^*(X, \pi)$ dont le diviseur est u.*

La section s est déterminée modulo la multiplication par une fonction holomorphe inversible. Le fibré π est déterminé à isomorphisme près.

Conservons les notations précédentes et désignons par π un fibré en droites holomorphe associé au cocycle $(s_{\kappa\iota})$. Les fonctions méromorphes s_ι se recollent en une section méromorphe s de π ayant les propriétés requises. Si s' est une deuxième section méromorphe dont le diviseur est u, le diviseur de la fonction méromorphe $\frac{s}{s'}$ est identiquement nul et cette fonction est holomorphe inversible.

Enfin, si ρ est un deuxième fibré en droites holomorphe et t une section méromorphe de ρ dont le diviseur est u, la section $\frac{s}{t}$ de $\pi \otimes \rho^*$ est holomorphe et partout non nulle ce qui achève la démonstration du lemme.

PROPOSITION 3. *La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$\mathscr{K}^*(X) \xrightarrow{\gamma_{II}} \mathscr{D}(X) \xrightarrow{v} \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$$

est exacte.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 2. Elle est laissée en exercice au lecteur.

On dit qu'un diviseur de $\mathscr{D}(X)$ est *positif* s'il est localement représentable par une fonction holomorphe. Les diviseurs positifs de X forment un sous-ensemble $\mathscr{D}_+(X)$ de $\mathscr{D}(X)$ stable par addition. La relation

$$\text{« } u - v \text{ appartient à } \mathscr{D}_+(X) \text{ »}$$

est une relation d'ordre partiel sur $\mathscr{D}(X)$ que l'on désigne par $v \leqslant u$.

Supposons X connexe. Pour tout diviseur u de X, l'ensemble

$$\mathscr{K}_u(X) = \{ h \in \mathscr{K}(X) \mid h = 0 \text{ ou } (h) \geqslant -u \}$$

est un sous-$\mathscr{O}(X)$-module de $\mathscr{K}(X)$. Désignons par π un fibré en droites holomorphe sur X et par s une section méromorphe non nulle de π ayant u pour diviseur (lemme 3). On vérifie aisément que la division par s induit un isomorphisme de $\mathscr{O}(X, \pi)$ sur $\mathscr{K}_u(X)$.