Chapitre premier VARIÉTÉS HOLOMORPHES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Chapitre premier

VARIÉTÉS HOLOMORPHES

§ 1. Fonctions holomorphes

Soient E et F deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Pour toute application $\mathbf{R}$-linéaire u de E dans F, on définit deux applications u' et u'' en posant

$$u'(t) = \frac{1}{2}\big(u(t) - iu(it)\big) \quad \text{et} \quad u''(t) = \frac{1}{2}\big(u(t) + iu(it)\big).$$

On vérifie aisément que la première est $\mathbf{C}$-linéaire et la seconde $\mathbf{C}$-antilinéaire. On obtient ainsi une décomposition canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E, F) \oplus \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(E, F).$$

Soit U un ensemble ouvert de E. On dit qu'une application f de U dans F est *holomorphe* si elle est continûment dérivable et si sa dérivée en tout point est $\mathbf{C}$-linéaire. Il revient au même de dire que $(Df)''$ est nulle ou encore que $(Df)'$ est égale à Df. On désigne par $\mathcal{O}(U, F)$ l'ensemble des applications holomorphes de U dans F. Si F est égal à $\mathbf{C}$, on utilise aussi la notation $\mathcal{O}(U)$.

Notons que $\mathcal{O}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^1(U, \mathbf{C})$ et $\mathcal{O}(U, F)$ un sous-$\mathcal{O}(U)$-module fermé de $\mathscr{C}^1(U, F)$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition (voir aussi [2], chap. VIII).

Lemme 1. *(1) La composée de deux applications holomorphes est holomorphe.*

(2) L'application réciproque d'un difféomorphisme holomorphe est holomorphe.

(3) Si une fonction holomorphe possède un logarithme, ce logarithme est holomorphe.

On identifie désormais $\mathbf{R}^{2n}$ à $\mathbf{C}^n$ au moyen de l'isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire défini par

$$\lambda(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$$

et

$$\lambda^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1), \dots, \frac{1}{2}(z_n + \bar{z}_n), \frac{1}{2i}(z_1 - \bar{z}_1), \dots, \frac{1}{2i}(z_n - \bar{z}_n)\right).$$

Les formules suivantes définissent des opérateurs différentiels sur $\mathbf{C}^n$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Soit U un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$ et soit f une application continûment dérivable de U dans E. On vérifie aisément que l'on a

$$(Df(z))'(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\, t_j \quad \text{et} \quad (Df(z))''(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z)\, \bar{t}_j$$

pour tout point z de U et tout vecteur t de $\mathbf{C}^n$. En particulier, pour que f soit holomorphe, il faut et il suffit que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$ soient nulles (conditions de Cauchy-Riemann). Supposons que E soit l'espace numérique $\mathbf{C}^m$ et que l'application $(f_1, \dots, f_m)$ soit holomorphe. La matrice jacobienne de f est donnée par la formule

$$\mathrm{Jac}(f) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1'}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1'}{\partial x_n} & -\frac{\partial f_1''}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial f_1''}{\partial x_n} \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\frac{\partial f_m'}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m'}{\partial x_n} & -\frac{\partial f_m''}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial f_m''}{\partial x_n} \\
\frac{\partial f_1''}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1''}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1'}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1'}{\partial x_n} \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\frac{\partial f_m''}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m''}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m'}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m'}{\partial x_n}
\end{pmatrix}$$

où f'_j et f''_j désignent les parties réelle et imaginaire de f_j. En particulier, si m est égal à n, le jacobien de f est donné par la formule

$$\operatorname{jac}(f) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f'_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f'_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial f'_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f'_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f''_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f''_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial f''_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f''_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}^2 .$$

Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés des fonctions holomorphes d'une variable.

THÉORÈME 1 (Cauchy). *Désignons par* Y *une pièce compacte de* $\mathbf{C}$, *par* U *un voisinage ouvert de* Y *et par* f *une fonction de* $\mathscr{C}^1(U, \mathbf{C})$. *On a pour tout point* ζ *de* $\mathring{Y}$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Y} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} + \frac{1}{2i\pi} \int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta} .$$

La fonction $\dfrac{1}{z-\zeta}$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. On en déduit que

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Y \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta}$$

où D_ε désigne le disque de centre ζ et de rayon ε. De plus, la fonction $\dfrac{1}{z-\zeta}$ étant holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{\zeta\}$, la formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2) montre que l'on a

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} - \int_{\partial Y} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} .$$

On conclut en remarquant que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \to 0} i \int_0^{2\pi} f(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = 2i\pi f(\zeta) .$$

COROLLAIRE 1. *Soit* f *une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert* U *de* $\mathbf{C}$. *Pour tout point* ζ *de* U, *il existe une suite* $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ *de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k (z-\zeta)^k$$

converge uniformément vers f *sur tout disque* D *de centre* ζ *relativement compact dans* U. *En particulier, la fonction* f *appartient à* $\mathscr{C}^{\infty}(U, \mathbf{C})$ *et l'on a*

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\zeta) = \frac{k\,!}{2i\pi}\int_{\partial D} f(z)\,\frac{dz}{(z-\zeta)^{k+1}} \qquad et \qquad \frac{\partial^k f}{\partial \bar{z}^k} = 0$$

pour tout entier naturel k.

Pour tout point w de D, la série

$$\sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{(w-\zeta)^k}{(z-\zeta)^{k+1}}$$

converge uniformément sur ∂D vers la fonction $\dfrac{1}{z-w}$. La formule de Cauchy montre alors que l'on a

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} f(z)\,\frac{dz}{z-w} = \sum_{k\in\mathbf{N}} (w-\zeta)^k\,\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} f(z)\,\frac{dz}{(z-\zeta)^{k+1}}$$

ce qui démontre l'assertion.

Corollaire 2 (Principe du prolongement analytique). *Soit* f *une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe* U *de* $\mathbf{C}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La fonction f *est identiquement nulle.*

(2) Il existe un point de U *où le germe de* f *est nul.*

(3) Il existe un point de U *où toutes les dérivées de* f *sont nulles.*

En particulier, pour tout point z *de* $\mathbf{C}$, *l'anneau* $\mathcal{O}_z$ *des germes au point* z *de fonctions holomorphes est intègre.*

Corollaire 3. *Soit* f *une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe* U *de* $\mathbf{C}$. *On suppose que* f *n'est pas identiquement nulle. Pour tout point* ζ *de* U, *il existe un entier naturel* k *et une fonction holomorphe* g *sur* U *tels que*

$$f(z) = (z-\zeta)^k\,g(z) \qquad \text{et} \qquad g(\zeta) \neq 0\,.$$

De plus, l'entier k *et la fonction* g *sont uniquement déterminés par ces conditions. En particulier, pour tout point* z *de* $\mathbf{C}$, *l'anneau* $\mathcal{O}_z$ *est un anneau de valuation discrète* [1]).

[1]) Ceci signifie que $\mathcal{O}_z$ est principal et qu'il possède un unique idéal premier non nul.

COROLLAIRE 4 (Weierstrass). *Soit* U *un ensemble ouvert de* $\mathbf{C}$. *Les topologies induites sur* $\mathcal{O}(U)$ *par* $L^1_{\mathrm{loc}}(U, \mathbf{C})$ *et* $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{C})$ *coïncident.*

Soit K un ensemble compact de U et soit α une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(U, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de K. Pour toute fonction holomorphe f sur U, tout entier naturel k et tout point ζ de $\overset{\circ}{K}$, la formule de Cauchy appliquée à la fonction αf montre que l'on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} f(z) \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - \zeta}$$

et

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\zeta) = \frac{(-1)^k k!}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} f(z) \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(z-\zeta)^{k+1}} .$$

Comme $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}$ est nulle au voisinage de K, on en déduit qu'il existe une constante $c_{\alpha,k}$ telle que

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial z^k} \right\|_K \leqslant c_{\alpha,k} \| f \|_{L^1, \, \mathrm{supp}\,(\alpha)} .$$

L'assertion en découle aussitôt.

COROLLAIRE 5 (Liouville). *Toute fonction holomorphe bornée sur* $\mathbf{C}$ *est constante.*

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. Pour tout entier naturel k et tout nombre réel r, on a

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial D_r} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}} .$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) \right| \leqslant \frac{k! \, \| f \|_{D_r}}{r^k} .$$

Si f est bornée et k strictement positif, ceci implique que $\dfrac{\partial^k f}{\partial z^k}(0)$ est nul, d'où l'assertion.

COROLLAIRE 6 (Laurent). *Soient* r, r_1 *et* r_2 *des nombres réels vérifiant les conditions*

$$0 \leqslant r_1 < r \leqslant r_2 .$$

On désigne par C *la couronne définie par*

$$C = \{ z \in \mathbf{C} \mid r_1 < |z| < r_2 \}$$

et par D *le disque de centre* 0 *et de rayon* r. *Pour toute fonction holomorphe* f *sur* C, *il existe une suite* $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ *de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k z^k$$

converge uniformément vers f *sur toute partie compacte de* C. *On a pour tout entier relatif* k,

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}} \qquad \textit{et} \qquad |a_k| \leqslant \frac{\|f\|_{\partial D}}{r^k} .$$

Pour tout entier k, la forme différentielle $f(z) \dfrac{dz}{z^{k+1}}$ est fermée. On en déduit que son intégrale sur ∂D est indépendante de r.

Introduisons deux nombres réels ρ_1 et ρ_2 vérifiant les relations

$$r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$$

et désignons par K la couronne définie par

$$K = \{ z \in \mathbf{C} \mid \rho_1 \leqslant |z| \leqslant \rho_2 \} .$$

Il résulte de la formule de Cauchy que l'on a pour tout point ζ de $\overset{\circ}{K}$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_2} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_1} f(z) \frac{dz}{z-\zeta}$$

où D_1 et D_2 désignent les disques de centre 0 et de rayons ρ_1 et ρ_2 respectivement. Les séries

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{\zeta^k}{z^{k+1}} \qquad \text{et} \qquad - \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}$$

convergent uniformément vers la fonction $\dfrac{1}{z-\zeta}$ sur ∂D_2 et ∂D_1 respectivement. On a par conséquent

$$f(\zeta) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \zeta^k \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_2} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}} + \sum_{k \in \mathbf{N}} \zeta^{-(k+1)} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_1} f(z) \frac{dz}{z^{-k}}$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 7 (Weierstrass). *Soit* D *un disque de centre* 0 *et de rayon* r *dans* $\mathbf{C}$ *et soit* f *une fonction holomorphe sur* $D \backslash \{0\}$. *On désigne par*

$(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ *les coefficients du développement de Laurent de* f *à l'origine et par* N *l'ensemble*

$$N = \{ k \in \mathbf{Z} \mid k < 0 \quad \text{et} \quad a_k \neq 0 \} .$$

(1) Pour que N *soit vide, il faut et il suffit que* f *soit bornée au voisinage de l'origine. La fonction* f *se prolonge alors en une fonction holomorphe sur* D.

(2) Pour que N *soit fini et non vide, il faut et il suffit que la fonction* $\frac{1}{f}$ *soit bornée au voisinage de l'origine.*

(3) Pour que N *soit infini, il faut et il suffit que l'image de* D *soit dense dans* $\mathbf{C}$.

Pour tout nombre réel ρ strictement compris entre 0 et r, on a

$$| a_k | \leqslant \rho^{-k} \sup_{|z| = \rho} |f(z)| .$$

La première assertion en résulte aussitôt.

Supposons N fini et non vide et désignons par k_0 sa borne inférieure. La fonction g définie par

$$g(z) = z^{-k_0} f(z)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur D ne s'annulant pas à l'origine, ce qui démontre la deuxième assertion.

Supposons N infini et montrons par l'absurde que l'image de f est dense. En effet, s'il existe un disque fermé de centre ζ dans $\mathbf{C}$ ne rencontrant pas $f(D)$, la fonction g définie sur $D \backslash \{0\}$ par

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \zeta}$$

demeure bornée au voisinage de l'origine ce qui est absurde en vertu de ce qui précède.

Soit $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un élément de $(\mathbf{R}_+^*)^n$ et soit $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un point de $\mathbf{C}^n$. On appelle *polydisque de centre* ζ *et de rayon* r l'ensemble défini par

$$D(\zeta, r) = \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid | z_j - \zeta_j | < r_j \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n \} .$$

On appelle *bord distingué du polydisque* $D(\zeta, r)$ l'ensemble

$$\partial_0 D(\zeta, r) = \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid | z_j - \zeta_j | = r_j \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n \} .$$

Proposition 1 (Cauchy). *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de l'adhérence d'un polydisque D de $\mathbf{C}^n$. Pour tout point ζ de D, on a*

$$f(\zeta) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\partial_0 D} f(z) \frac{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)}.$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et du théorème de Fubini.

Corollaire 1. *Soit f une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert U de $\mathbf{C}^n$. Pour tout point ζ de U, il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} a_\alpha (z - \zeta)^\alpha \text{ [1]}$$

converge uniformément vers f sur tout polydisque D de centre ζ relativement compact dans U. En particulier, la fonction f appartient à $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{C})$ et l'on a

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(\zeta) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(z) \frac{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{(z_1 - \zeta_1)^{\alpha_1 + 1} \ldots (z_n - \zeta_n)^{\alpha_n + 1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \bar{z}^\alpha} = 0 .$$

pour tout multi-indice α.

La démonstration est analogue à celle du corollaire 1 du théorème 1.

Corollaire 2 (Principe du prolongement analytique). *Soit f une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe U de $\mathbf{C}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La fonction f est identiquement nulle.

(2) Il existe un point de U où le germe de f est nul.

(3) Il existe un point de U où toutes les dérivées de f sont nulles.

En particulier, pour tout point z de $\mathbf{C}^n$, l'anneau $\mathcal{O}_z$ des germes au point z de fonctions holomorphes est intègre.

Corollaire 3 (Weierstrass). *Soit U un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$. Les topologies induites sur $\mathcal{O}(U)$ par $L^1_{\text{loc}}(U, \mathbf{C})$ et $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{C})$ coïncident.*

---

[1]) Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et tout point $z = (z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n! \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}} \qquad \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{z}_1^{\alpha_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{\alpha_n}}$$

Une utilisation répétée de l'argument développé au corollaire 4 du théorème 1 montre qu'il existe pour tout polydisque D relativement compact dans U et pour tout multi-indice α une constante $c_{\alpha,D}$ telle que

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} \right\|_{\bar{D}} \leqslant c_{\alpha,D} \|f\|_{L^1,K}$$

où K est un voisinage compact de l'adhérence de D dans U. L'assertion en résulte aussitôt.

§ 2. Variétés holomorphes

Toutes les cartes de variétés topologiques considérées désormais prennent leurs valeurs dans des espaces numériques complexes.

Soit X une variété topologique.

On dit que deux cartes de X sont *holomorphiquement compatibles* si les changements de cartes sont holomorphes.

On appelle *atlas holomorphe de* X tout ensemble de cartes deux à deux holomorphiquement compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas holomorphes sont *compatibles* si leur réunion est un atlas holomorphe. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures holomorphes de* X.

On appelle *variété holomorphe* toute variété topologique munie d'une structure holomorphe.

Soit X une variété holomorphe.

On appelle (abusivement) *atlas de* X tout atlas holomorphe appartenant à la structure holomorphe de X et *carte de* X toute carte appartenant à un atlas de X.

Soit x un point de X. Toutes les cartes de X dont le domaine contient x prennent leurs valeurs dans le même espace numérique complexe. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de* X *au point* x et se désigne par $\dim_x(X)$. La fonction $\dim(X)$ est localement constante. On dit que X est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe holomorphe* (resp. *surface holomorphe*) toute variété holomorphe de dimension pure 1 (resp. 2).

Les changements de cartes étant en particulier des difféomorphismes, la variété topologique X se trouve naturellement munie d'une structure différentielle que l'on dit *sous-jacente à* X. Pour éviter des confusions, on désigne quelquefois par $X^{\mathbf{R}}$ la variété différentielle obtenue en munissant X de la structure sous-jacente.

Le jacobien des changements de cartes étant toujours positif, la variété différentielle $X^{\mathbf{R}}$ est orientable et munie d'une orientation naturelle.

On dit qu'une application de X dans un espace vectoriel complexe E de dimension finie est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de X (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de X). On désigne par $\mathcal{O}(X, E)$ l'ensemble de ces applications. Si E est égal à $\mathbf{C}$, on utilise aussi la notation $\mathcal{O}(X)$.

Notons que $\mathcal{O}(X)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ et $\mathcal{O}(X, E)$ un sous-$\mathcal{O}(X)$-module de $\mathscr{C}^\infty(X, E)$. De plus, les topologies induites par $\mathscr{C}^\infty(X, E)$ et $L^1_{\text{loc}}(X, E)$ sur $\mathcal{O}(X, E)$ coïncident (§ 1, proposition 1, corollaire 3). Pour cette topologie, l'espace $\mathcal{O}(X, E)$ est complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

On dit qu'une application continue u de X dans une variété holomorphe Y est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans tout couple de cartes. On désigne par $\mathcal{O}(X, Y)$ l'ensemble de ces applications.

On dit que l'application u est un *isomorphisme* si elle est bijective et si u et u^{-1} sont holomorphes.

Les variétés holomorphes, les applications holomorphes et leur composition forment une catégorie. Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions.

LEMME 1. *Pour qu'une application continue u de X dans Y soit holomorphe, il faut et il suffit que l'application u^* envoie $\mathcal{O}(V)$ dans $\mathcal{O}(u^{-1}(V))$ pour tout ensemble ouvert V de Y.*

Les exemples donnés au paragraphe 1 du chapitre 0 fournissent *mutatis mutandis* des exemples de variétés holomorphes. En particulier, pour tout entier naturel n, on construit comme dans l'exemple 5 l'*espace projectif complexe* $\mathbf{P}^n$ *de dimension* n.

Soit X une variété holomorphe et soit π une application de but X.

On dit que deux cartes complexes de π sont *holomorphiquement compatibles* si la transition est holomorphe.

On appelle *atlas holomorphe de* π tout ensemble de cartes complexes deux à deux holomorphiquement compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas holomorphes sont *compatibles* si leur réunion est un atlas holomorphe. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures vectorielles holomorphes de* π.

On appelle *fibré vectoriel holomorphe sur* X toute application de but X munie d'une structure vectorielle holomorphe.

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

On appelle (abusivement) *atlas de* π tout atlas holomorphe appartenant à la structure vectorielle holomorphe de π et *carte de* π toute carte appartenant à un atlas de π.

On notera que la source $\tau(\pi)$ de π est naturellement munie d'une structure holomorphe (chap. 0, § 2).

Les transitions étant en particulier indéfiniment dérivables, l'application π est de manière naturelle un fibré vectoriel complexe sur $X^{\mathbf{R}}$. Pour éviter des confusions, nous dirons qu'un fibré vectoriel complexe sur $X^{\mathbf{R}}$ est un *fibré vectoriel différentiel sur* X.

On dit qu'une section de π est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de π (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de π ou encore si c'est une application holomorphe de X dans $\tau(\pi)$). On désigne par $\mathcal{O}(X, \pi)$ l'ensemble de ces sections.

Remarquons que $\mathcal{O}(X, \pi)$ est un sous-$\mathcal{O}(X)$-module de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$. De plus, les topologies induites par $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$ et $L^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ sur $\mathcal{O}(X, \pi)$ coïncident. Pour cette topologie, l'espace $\mathcal{O}(X, \pi)$ est complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Si ρ est un second fibré vectoriel holomorphe sur X, on désigne par $\mathcal{O}(\pi, \rho)$ l'ensemble des morphismes holomorphes de π dans ρ (i.e. les applications holomorphes u de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$ telles que

$$\rho \cdot u = \pi ,$$

qui induisent des applications $\mathbf{C}$-linéaires sur les fibres).

Les exemples et les constructions donnés au paragraphe 2 du chapitre 0 fournissent *mutatis mutandis* des exemples et des constructions de fibrés vectoriels holomorphes. En particulier, si π et ρ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur X, il en est de même des fibrés vectoriels $\pi \oplus \rho$, $\pi \otimes \rho$, π^* et $\Lambda\pi$.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. On dit qu'un cocycle de rang p subordonné à $\mathcal{U}$ est *holomorphe* si les applications qui le composent sont holomorphes. On définit de la même manière la relation de cobordance entre cocycles holomorphes, d'où un ensemble $\operatorname{Pic}(X, G(p; \mathbf{C}))$ dont les éléments s'appellent les *fibrés principaux holomorphes de groupe structural* $G(p; \mathbf{C})$ *sur* X.

Les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels holomorphes de rang p sont en correspondance biunivoque avec les fibrés principaux holomorphes de groupe structural $G(p; \mathbf{C})$.

On prendra garde de distinguer Pic $(X, G(p; \mathbf{C}))$ et Pic $(X^{\mathbf{R}}, G(p; \mathbf{C}))$: un fibré vectoriel holomorphe différentiablement trivial n'est pas nécessairement holomorphiquement trivial (chap. IV, § 7).

Soit X une variété holomorphe de dimension pure n.

Le fibré cotangent complexe $\Omega^1_{\mathbf{C}}$ à $X^{\mathbf{R}}$ est un fibré vectoriel différentiel de rang $2n$ sur X. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X et pour tout point x de U, on a un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire

$$\varepsilon_{x,\phi} : \Omega^1_{\mathbf{C},X} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) .$$

(chap. 0, § 3, lemme 1). Il résulte de la définition même des applications holomorphes que les sous-espaces $\Omega^{1,0}_x$ et $\Omega^{0,1}_x$ de $\Omega^1_{\mathbf{C},x}$ images réciproques par $\varepsilon_{x,\phi}$ des sous-espaces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ et $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ sont indépendants de ϕ.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{C})$, avec k au moins égal à 1, on définit des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \phi_n}, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_n}$ de $\mathscr{C}^{k-1}(U, \mathbf{C})$ en posant

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'_j} - i\,\frac{\partial f}{\partial \phi''_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'_j} + i\,\frac{\partial f}{\partial \phi''_j}\right)$$

où ϕ'_j et ϕ''_j désignent les parties réelle et imaginaire de ϕ_j. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions (chap. 0, § 3, lemme 5).

LEMME 2. *Pour toute carte ϕ de X et tout point x du domaine de ϕ, les différentielles des germes $\phi_{1,x}, \ldots, \phi_{n,x}$ (resp. $\overline{\phi}_{1,x}, \ldots, \overline{\phi}_{n,x}$) forment une base de $\Omega^{1,0}_x$ (resp. $\Omega^{0,1}_x$). Pour tout germe f de A^1_x, on a*

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x)\, d\phi_{j,x} + \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_j}(x)\, d\overline{\phi}_{j,x} .$$

Soit π la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega^{1,0}_x$ sur X et soient ϕ et ψ des cartes de domaines respectifs U et V dans X. Le lemme 2 montre que les applications

$$\tilde{\phi}' : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}' : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$$

définies par

$$\tilde{\phi}'(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\phi}(y)') \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}'(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\psi}(y)')$$

(on utilise les notations du paragraphe 1) sont des cartes complexes de π.

Ces cartes sont holomorphiquement compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t(D\gamma(\phi(x))')^{-1} = {}^t D\gamma(\phi(x))^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Le fibré vectoriel holomorphe ainsi défini se désigne par $\Omega^{1,0}$. On l'appelle parfois le *fibré cotangent holomorphe à* X.

Soit ρ la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega_x^{0,1}$ sur X. Le lemme 2 montre que les applications

$$\tilde{\phi}'' : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}'' : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$$

définies par

$$\tilde{\phi}''(x, y) = \left(x, \varepsilon_{x,\phi}(y)''\right) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}''(x, y) = \left(x, \varepsilon_{x,\psi}(y)''\right)$$

sont des cartes complexes de ρ. Ces cartes sont (différentiablement) compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t\overline{D\gamma(\phi(x))}^{-1}$$

Le fibré vectoriel différentiel ainsi défini se désigne par $\Omega^{0,1}$. Notons que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Omega_{\mathbf{C}}^1 = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$$

Pour tout couple (p, q) d'entiers, on pose

$$\Omega^{p,q} = \Lambda^p \Omega^{1,0} \oplus \Lambda^q \Omega^{0,1} .$$

On dit qu'une forme différentielle est *homogène de bidegré* (p, q) si elle prend ses valeurs dans $\Omega^{p,q}$. La restriction à U de toute forme différentielle homogène de bidegré (p, q) s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u\,|_U = \sum_{J \in S_p(n) \quad K \in S_q(n)} u_{J,K}\, d\phi_J \wedge d\overline{\phi}_K$$

où l'on a posé

$$d\phi_J = d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_p} \quad \text{et} \quad d\overline{\phi}_K = d\overline{\phi}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{\phi}_{k_q} .$$

Lemme 3. *La différentielle de toute forme de* $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,q})$ *appartient à*

$$\mathscr{C}^0(X, \Omega^{p+1,q}) \oplus \mathscr{C}^0(X, \Omega^{p,q+1}) .$$

On peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$. L'assertion résulte alors des définitions.

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,q})$, on désigne par $d'u$ (resp. $d''u$) la composante homogène de bidegré $(p+1, q)$ (resp. $(p, q+1)$) de du. Le lemme suivant est laissé en exercice au lecteur (chap. 0, § 3, théorème 1).

LEMME 4. *Pour qu'une forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,0})$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $d''u$ soit nul.*

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^2(X, \Omega_{\mathrm{C}})$, on a

$$d'(d'u) = 0 \qquad d'(d''u) + d''(d'u) = 0 \qquad d''(d''u) = 0\,.$$

Pour tout couple (u, v) de formes différentielles dans $\mathscr{C}^1(X, \Omega_{\mathrm{C}})$, avec u homogène de degré r, on a

$$d'(u \wedge v) = d'u \wedge v + (-1)^r u \wedge d'v$$

et

$$d''(u \wedge v) = d''u \wedge v + (-1)^r u \wedge d''v\,.$$

En particulier, l'application d'' de $\mathscr{C}^1(X, \Omega_{\mathrm{C}})$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Omega_{\mathrm{C}})$ est $\mathcal{O}(X)$-linéaire.

Soit h une application holomorphe de X dans une variété holomorphe Y de dimension pure m. Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V contenant $h(U)$ dans Y. On a par définition

$$h^*(d\psi_j) = d(\psi_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial(\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k}\, d\phi_k$$

et

$$h^*(d\overline{\psi}_j) = d(\overline{\psi}_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \overline{\frac{\partial(\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k}}\, d\overline{\phi}_k$$

pour tout entier j compris entre 1 et m. On en déduit aisément que l'image réciproque par h d'une forme homogène de bidegré (p, q) est une forme homogène de bidegré (p, q) et que l'on a

$$d'h^*(u) = h^*(d'u) \qquad \text{et} \qquad d''h^*(u) = h^*(d''u)$$

pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(Y, \Omega_{\mathrm{C}})$.

Soit π un fibré vectoriel holomorphe de rang pur m sur X et soient Φ et Ψ des cartes de π de domaines respectifs U et V. Pour toute section s de $\mathscr{C}^1(X, \pi \otimes \Omega^{p,q})$, on a

$$s_\Phi = (u_1, \ldots, u_m) \qquad \text{et} \qquad s_\Psi = (v_1, \ldots v_m)$$

où les u_j et les v_j sont des formes différentielles homogènes de bidegré (p, q). Pour tout entier j compris entre 1 et m, on a

$$v_j = \sum_{1 \leq k \leq m} g_{jk} u_k$$

où $(g_{jk})_{1 \leq j,k \leq m}$ désigne la transition de Φ dans Ψ. On en déduit que

$$d'' v_j = \sum_{1 \leq k \leq m} g_{jk} d'' u_k .$$

Autrement dit, les m-uples $(d''u_1, ..., d''u_m)$ et $(d''v_1, ..., d''v_m)$ se recollent en une section de $\mathscr{C}^0 (X, \pi \otimes \Omega^{p,q+1})$ que l'on désigne encore par $d''s$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition et du lemme 4.

LEMME 5. *Pour qu'une section s de $\mathscr{C}^1 (X, \pi)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $d''s$ soit nul.*

Pour toute section s de $\mathscr{C}^2 (X, \pi \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a

$$d'' (d'' s) = 0 .$$

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1 (X, \Omega_{\mathbf{C}}^r)$ et toute section v de $\mathscr{C}^1 (X, \pi \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a

$$d'' (u \wedge v) = d'' u \wedge v + (-1)^r u \wedge d'' v .$$

Pour toute section u de $\mathscr{C}^1 (X, \pi \otimes \Omega_{\mathbf{C}}^r)$ et toute section v de $\mathscr{C}^1 (X, \pi^* \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a

$$d'' (u, v) = (d'' u, v) + (-1)^r (u, d'' v) .$$

On appelle *complexe de Dolbeault de* π la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathscr{C}^\infty (X, \pi) \xrightarrow{d''0} \mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \xrightarrow{d''1} \dots \xrightarrow{d''n-1} \mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,n}) \to 0$$

où d''^r désigne la restriction de d'' à $\mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,r})$. On appelle *groupes de cohomologie de* π les espaces vectoriels

$$\mathbf{H}^r (X, \pi) = \operatorname{Ker} d''^r / \operatorname{Im} d''^{r-1} .$$

La différentielle d'' diminuant les supports, on a une deuxième suite

$$0 \to \mathscr{C}_c^\infty (X, \pi) \xrightarrow{d_c''0} \mathscr{C}_c^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \xrightarrow{d_c''1} \dots \xrightarrow{d_c''n-1} \mathscr{C}_c^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,n}) \to 0$$

et des groupes de cohomologie

$$\mathbf{H}_c^r (X, \pi) = \operatorname{Ker} d_c''^r / \operatorname{Im} d_c''^{r-1} .$$

Le noyau de d''^0 s'identifie aux sections holomorphes de π. On a donc

$$\mathbf{H}^0 (X, \pi) = \mathscr{O} (X, \pi)$$

et si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}_c^0(X, \pi)$ est nul (principe du prolongement analytique).

On prendra garde de ne pas confondre le groupe de cohomologie de de Rham $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ de la variété différentielle $X^{\mathbf{R}}$ (chap. 0, § 4) et le groupe de cohomologie de Dolbeault $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}_X)$ du fibré produit $\mathbf{C}_X$.

§ 3. Fonctions méromorphes

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété holomorphe et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Lemme 1. *On suppose X connexe et l'on désigne par f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur X. L'ensemble V défini par*

$$V = \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}$$

est alors connexe et dense dans X.

Il suffit de montrer que tout point x_0 de X possède un voisinage U tel que $V \cap U$ soit connexe et dense dans U.

On peut donc supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$ et, par un changement linéaire affine de coordonnées, on peut également supposer que x_0 est l'origine et que la fonction partielle $f(0, \ldots, 0, z_n)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0. Désignons par D'' un disque fermé de centre 0 dans $\mathbf{C}$ tel que $f(0, \ldots, 0, z_n)$ soit holomorphe au voisinage de D'' et ne s'annule pas sur $\partial D''$ (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Par continuité, il existe un nombre réel ε strictement positif tel que f soit holomorphe au voisinage de $D' \times D''$ et ne s'annule pas sur $D' \times \partial D''$, en désignant par D' le polydisque de $\mathbf{C}^{n-1}$ défini par

$$D' = \{ (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} \mid \max_{1 \leq j \leq n-1} |z_j| \leqslant \varepsilon \}.$$

L'ensemble $V \cap (D' \times D'')$ est connexe et dense dans $D' \times D''$ comme il résulte aussitôt de la formule

$$\begin{aligned} & V \cap (D' \times D'') \\ &= (D' \times \partial D'') \cup \bigcup_{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in D'} \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid f(z_1, \ldots, z_n) \neq 0 \}. \end{aligned}$$

Pour tout point x de X, l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes en x de fonctions holomorphes est intègre (§ 1, proposition 1, corollaire 2) et l'ensemble $\mathcal{O}(\pi)_x$

des germes en x de sections holomorphes de π est un $\mathcal{O}_x$-module. On désigne par $\mathcal{K}_x$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_x$ et l'on pose

$$\mathcal{K}(\pi)_x = \mathcal{K}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(\pi)_x .$$

Tout élément de $\mathcal{K}(\pi)_x$ s'écrit comme quotient d'un élément de $\mathcal{O}(\pi)_x$ par un élément non nul de $\mathcal{O}_x$.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \mathcal{K}(\pi)_x$ sur X. Pour éviter des confusions, on désigne par u_x l'image du point x de X. On dit que u est une *section méromorphe de* π si elle vérifie la condition suivante:

(M) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert connexe U de x_0, une section holomorphe s de π sur U et une fonction holomorphe f non nulle sur U tels que

$$u_x = \frac{s_x}{f_x}$$

pour tout point x de U.

On désigne par $\mathcal{K}(X, \pi)$ l'ensemble des sections méromorphes de π et par $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur X (i.e. les sections méromorphes du fibré produit $\mathbf{C}_X$). On vérifie aisément que l'addition et la multiplication point par point définissent sur $\mathcal{K}(X)$ une structure d'anneau commutatif avec élément unité et sur $\mathcal{K}(X, \pi)$ une structure de $\mathcal{K}(X)$-module.

La restriction à un ensemble ouvert d'une section méromorphe est une section méromorphe. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathcal{K}(U, \pi) \to \mathcal{K}(\pi)_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédiatement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'une section méromorphe à sa valeur au point x.

On dit qu'une section méromorphe u de π est *régulière au point* x si u_x appartient à $\mathcal{O}(\pi)_x$. On appelle *domaine de régularité de* u l'ensemble $R(u)$ des points où u est régulière. Les points n'appartenant pas au domaine de régularité s'appellent les *pôles de* u.

LEMME 2. *Supposons* X *connexe. Le domaine de régularité d'une section méromorphe* u *de* π *est un ensemble ouvert, connexe et dense dans* X.

Soit x_0 un point de X. On désigne par U un voisinage ouvert connexe de x_0, par s une section holomorphe de π sur U et par f une fonction holomorphe non nulle sur U tels que

$$u_x = \frac{s_x}{f_x}$$

pour tout point x de U. Si u est régulière au point x_0, on peut supposer que f ne s'annule pas sur U ce qui montre déjà que $R(u)$ est ouvert. Si u n'est pas régulière au point x_0, l'ensemble

$$V = \{ x \in U \mid f(x) \neq 0 \}$$

est connexe et dense dans U (lemme 1), d'où l'assertion puisqu'il est contenu dans $R(u)$.

Pour toute section méromorphe u de π et pour tout point x de $R(u)$, on pose

$$\tilde{u}(x) = u_x(x) .$$

Ceci a bien un sens puisque u_x appartient à $\mathcal{O}(\pi)_x$. Il est clair que $\tilde{u}$ est une section holomorphe de π sur $R(u)$. On dit qu'elle est *associée à* u.

Proposition 1 (Principe du prolongement analytique). *Supposons* X *connexe et soient* u *et* v *deux sections méromorphes de* π. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Les sections u *et* v *coïncident partout.*

(2) Les sections u *et* v *coïncident sur* $R(u) \cap R(v)$.

(3) Les germes de u *et* v *coïncident en un point.*

Il suffit de montrer que (3) implique (1). Désignons par V l'ensemble des points de X où les germes de u et v coïncident. Puisqu'il est ouvert, il suffit de montrer qu'il est fermé. Tout point x_0 de $\overline{V}$ possède un voisinage ouvert connexe U tel que

$$u \mid_U = \frac{s}{f} \quad \text{et} \quad v \mid_U = \frac{t}{g} ,$$

et puisque les germes u_x et v_x coïncident en un point x de U, le principe du prolongement analytique (§ 1, proposition 1, corollaire 2) montre que l'on a

$$gs = ft$$

ce qui démontre l'assertion.

Corollaire. *Si* X *est connexe, l'anneau* $\mathcal{K}(X)$ *des fonctions méromorphes sur* X *est un corps.*

Désignons par u une fonction méromorphe non nulle sur X. Il résulte de la proposition 1 que u_x n'est jamais nul. On vérifie aisément que les germes u_x^{-1} définissent une fonction méromorphe sur X ce qui démontre l'assertion.

Remarque 1.

Supposons X connexe et désignons par s une section holomorphe de π sur un ensemble ouvert non vide U de X. La proposition 1 montre qu'il existe au plus une section méromorphe de π dont le domaine de régularité contient U et dont la restriction coïncide avec s. S'il en existe une, on dit (abusivement) que s est une *section méromorphe de* π.

Supposons π de rang pur p. On désigne par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement de X par des domaines de cartes de π et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang p subordonné à ce recouvrement et associé à π. Les sections méromorphes de π sont en correspondance biunivoque avec les familles $(u_\iota)_{\iota\in I}$ où u_ι est un p-uple de fonctions méromorphes sur U_ι, vérifiant les conditions de recollement

$$u_\kappa = g_{\kappa\iota} u_\iota \, .$$

On appelle *forme différentielle méromorphe de degré* r toute section méromorphe de $\Omega^{r,0}$. On définit de manière évidente l'image réciproque d'une forme différentielle méromorphe par une application holomorphe.

Pour tout point x de X, on désigne par $\mathcal{Q}(\pi)_x$ le $\mathcal{O}_x$-module quotient de $\mathcal{K}(\pi)_x$ par $\mathcal{O}(\pi)_x$.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x\in X} \mathcal{Q}(\pi)_x$ sur X. Pour éviter des confusions, l'image d'un point x de X se désigne par u_x. On dit que u est une *partie principale de* π si elle vérifie la condition suivante:

(*PP*) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une section méromorphe de π sur U dont le germe représente u_x en tout point x de U.

On désigne par $\mathcal{Q}(X, \pi)$ l'ensemble des parties principales de π. L'addition et la multiplication point par point en font un $\mathcal{O}(X)$-module.

La restriction à un ensemble ouvert d'une partie principale est une partie principale. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathcal{Q}(U, \pi) \to \mathcal{Q}(\pi)_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédiatement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'une partie principale à sa valeur au point x.

Premier problème de Cousin. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie principale appartienne à l'image de l'application canonique*

$$\gamma_I : \mathscr{K}(X, \pi) \to \mathscr{Q}(X, \pi).$$

Pour tout élément u de $\mathscr{Q}(X, \pi)$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et pour chaque indice ι une section méromorphe s_ι de π sur U_ι représentant $u \,|_{U_\iota}$. Par définition, la section

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

est holomorphe sur $U_\iota \cap U_\kappa$. Il existe donc pour chaque indice ι une section t_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \pi)$ telle que

$$s_{\kappa\iota} = t_\iota - t_\kappa$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). En particulier, les formes différentielles $d''t_\iota$ se recollent en une section v de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$. La forme différentielle $d''v$ est nulle et l'on vérifie aisément que la classe $\delta(u)$ de v dans $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ ne dépend que de u.

Proposition 2. *La suite de $\mathscr{O}(X)$-modules et d'applications linéaires*

$$\mathscr{K}(X, \pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathscr{Q}(X, \pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X, \pi)$$

est exacte.

On conserve les notations précédentes. Si u provient d'une section méromorphe de π, on peut prendre comme recouvrement ouvert l'ensemble X lui-même et l'on voit que $\delta(u)$ est nul.

Réciproquement, supposons $\delta(u)$ nul. Ceci signifie qu'il existe une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ telle que

$$d''t = v.$$

Pour tout indice ι, la section $t_\iota - t \,|_{U_\iota}$ est holomorphe et les sections $s_\iota - t_\iota + t \,|_{U_\iota}$ se recollent en une section méromorphe de π représentant u, d'où l'assertion.

Pour tout point x de X, on désigne par $\mathscr{D}_x$ le groupe abélien quotient de $\mathscr{K}_x^*$ par $\mathscr{O}_x^*$, où $\mathscr{O}_x^*$ (resp. $\mathscr{K}_x^*$) désigne le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{O}_x$ (resp. $\mathscr{K}_x$). Ce groupe est noté additivement.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \mathscr{D}_x$ sur X. Pour éviter des confusions, l'image d'un point x de X se désigne par u_x. On dit que u est un *diviseur de* X si la condition suivante est vérifiée:

(D) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une fonction méromorphe inversible sur U dont le germe en tout point représente u_x.

On désigne par $\mathscr{D}(X)$ l'ensemble des diviseurs de X. L'addition point par point en fait un groupe abélien.

La restriction d'un diviseur à un ensemble ouvert est un diviseur. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathscr{D}(U) \to \mathscr{D}_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédiatement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'un diviseur à sa valeur au point x.

Soit π un fibré en droites holomorphe sur X. On désigne par $\mathscr{K}^*(X, \pi)$ l'ensemble des sections méromorphes de π qui ne s'annulent identiquement sur aucune composante connexe de X. Soit s une telle section. L'expression de s dans toute carte Φ de π est une fonction méromorphe inversible sur le domaine U de Φ. La classe de cette fonction dans $\mathscr{D}(U)$ est indépendante de Φ. Par recollement, on obtient ainsi un diviseur sur X que l'on dit *associé à* s et que l'on désigne par (s). On définit ainsi une application canonique

$$\gamma_{II}(\pi) : \mathscr{K}^*(X, \pi) \to \mathscr{D}(X).$$

Deuxième problème de Cousin. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un diviseur appartienne à l'image de l'application canonique*

$$\gamma_{II} : \mathscr{K}^*(X) \to \mathscr{D}(X).$$

Pour tout diviseur u de X, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι une fonction méromorphe inversible s_ι sur U_ι représentant $u \mid_{U_\iota}$. Par définition, la fonction

$$s_{\kappa\iota} = s_\kappa s_\iota^{-1}$$

est holomorphe inversible sur $U_\iota \cap U_\kappa$ et la famille $(s_{\kappa\iota})$ est un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à (U_ι). On vérifie aisément que sa classe $v(u)$ dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de u.

LEMME 3. *Pour tout diviseur* u *de* X, *il existe un fibré en droites holomorphe* π *sur* X *et une section méromorphe* s *de* $\mathscr{K}^*(X, \pi)$ *dont le diviseur est* u.

La section s *est déterminée modulo la multiplication par une fonction holomorphe inversible. Le fibré* π *est déterminé à isomorphisme près.*

Conservons les notations précédentes et désignons par π un fibré en droites holomorphe associé au cocycle $(s_{\kappa\iota})$. Les fonctions méromorphes s_ι se recollent en une section méromorphe s de π ayant les propriétés requises. Si s' est une deuxième section méromorphe dont le diviseur est u, le diviseur de la fonction méromorphe $\frac{s}{s'}$ est identiquement nul et cette fonction est holomorphe inversible.

Enfin, si ρ est un deuxième fibré en droites holomorphe et t une section méromorphe de ρ dont le diviseur est u, la section $\frac{s}{t}$ de $\pi \otimes \rho^*$ est holomorphe et partout non nulle ce qui achève la démonstration du lemme.

PROPOSITION 3. *La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$\mathscr{K}^*(X) \xrightarrow{\gamma_{II}} \mathscr{D}(X) \xrightarrow{\nu} \operatorname{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$$

est exacte.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 2. Elle est laissée en exercice au lecteur.

On dit qu'un diviseur de $\mathscr{D}(X)$ est *positif* s'il est localement représentable par une fonction holomorphe. Les diviseurs positifs de X forment un sous-ensemble $\mathscr{D}_+(X)$ de $\mathscr{D}(X)$ stable par addition. La relation

$$\text{« } u - v \text{ appartient à } \mathscr{D}_+(X) \text{ »}$$

est une relation d'ordre partiel sur $\mathscr{D}(X)$ que l'on désigne par $v \leqslant u$.

Supposons X connexe. Pour tout diviseur u de X, l'ensemble

$$\mathscr{K}_u(X) = \{ h \in \mathscr{K}(X) \mid h = 0 \text{ ou } (h) \geqslant -u \}$$

est un sous-$\mathscr{O}(X)$-module de $\mathscr{K}(X)$. Désignons par π un fibré en droites holomorphe sur X et par s une section méromorphe non nulle de π ayant u pour diviseur (lemme 3). On vérifie aisément que la division par s induit un isomorphisme de $\mathscr{O}(X, \pi)$ sur $\mathscr{K}_u(X)$.

§ 4. Courbes holomorphes

Nous allons maintenant nous limiter à l'étude des courbes holomorphes (appelées aussi *surfaces de Riemann*). Nous avons toujours supposé les variétés (topologiques, différentielles ou holomorphes) paracompactes. Un célèbre théorème de Radò affirme que cette hypothèse est superflue dans le cas des courbes holomorphes (voir par exemple [6]). Nous n'utiliserons pas ce résultat qui, au demeurant est très particulier à la dimension complexe 1.

Théorème 1. *Soient X et Y deux courbes holomorphes et soit u une application holomorphe de X dans Y. On suppose X connexe. Alors u est ouverte ou constante.*

Supposons u non constante. L'assertion étant locale, on se ramène aisément au cas où X et Y sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$. Soit x_0 un point de X. Il suffit de montrer que $u(X)$ est un voisinage de $u(x_0)$ (toutes les composantes connexes d'un ensemble ouvert de X sont ouvertes). Pour ce faire, on peut supposer que $u(x_0)$ est nul. Il existe alors un disque D de centre x_0 relativement compact dans X tel que u ne s'annule pas sur ∂D (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Posons

$$\rho = \inf_{z \in \partial D} |u(z)| .$$

Il suffit de montrer que tout point w de Y n'appartenant pas à $u(X)$ est de module strictement supérieur à $\frac{\rho}{2}$. On peut évidemment supposer qu'il est de module strictement inférieur à ρ et l'on définit une fonction holomorphe f sur X en posant

$$|f(z)| = \frac{1}{u(z) - w} .$$

Pour tout point z de ∂D, on a

$$f(z) = \frac{1}{|u(z) - w|} \leqslant \frac{1}{\rho - |w|} .$$

On en déduit que (§ 1, théorème 1, corollaire 1),

$$\frac{1}{|w|} = |f(x_0)| \leqslant \|f\|_{\partial D} \frac{1}{\rho - |w|}$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1 (Principe du maximum). *Soit* X *une courbe holomorphe connexe et soit* f *une fonction holomorphe sur* X. *Si la fonction* f *possède un maximum relatif, elle est constante.*

Soit x_0 un point de X et soit K un voisinage compact de x_0 tel que

$$|f(x_0)| = \|f\|_K .$$

L'ensemble $f(K)$ est contenu dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $|f(x_0)|$, ce n'est donc pas un voisinage de $f(x_0)$ et par conséquent f est constante.

COROLLAIRE 2. *Soit* X *une courbe holomorphe connexe et soit* K *une partie compacte de* X *distincte de* X. *Pour toute fonction holomorphe* f *sur* X, *on a*

$$\|f\|_{\partial K} = \|f\|_K .$$

En effet, si f atteint son maximum en un point de $\mathring{K}$, elle est constante.

COROLLAIRE 3. *Toute fonction holomorphe sur une courbe holomorphe compacte et connexe est constante.*

COROLLAIRE 4. *Soient* X *et* Y *deux courbes holomorphes connexes et soit* u *une application holomorphe de* X *dans* Y. *On suppose* X *compacte. Si* Y *est ouverte, l'application* u *est constante. Si* Y *est compacte, l'application* u *est constante ou surjective.*

Remarque 1.

Le théorème 1 et ses corollaires demeurent valables si X est de dimension supérieure à 1. C'est une conséquence facile du cas traité ici.

PROPOSITION 1. *Soient* X *et* Y *deux courbes holomorphes et soit* u *une application holomorphe de* X *dans* Y. *On suppose que* u *n'est constante sur aucune composante connexe de* X. *Pour tout point* x_0 *de* X, *il existe une carte* ϕ *de* X *centrée en* x_0, *une carte* ψ *de* Y *centrée en* $u(x_0)$ *et un entier* m *strictement positif tels que*

$$u_{\psi\phi}(z) = z^m .$$

Soit ϕ (resp. ψ) une carte de domaine U (resp. V) centrée en x_0 (resp. $u(x_0)$). L'expression de u dans (ϕ, ψ) est une fonction holomorphe f sur

$\phi(U)$, nulle à l'origine mais non identiquement nulle. Si $\phi(U)$ est un disque suffisamment petit, il existe un entier m et une fonction g holomorphe inversible sur $\phi(U)$ tels que

$$f(z) = z^m g(z)$$

(§ 1, théorème 1, corollaire 3). Il existe alors une fonction holomorphe h sur $\phi(U)$ dont la puissance m^e est égale à g. En diminuant au besoin $\phi(U)$, on peut supposer que l'application θ définie par

$$\theta(z) = z\,h(z)$$

est un isomorphisme de $\phi(U)$ sur un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. Il suffit alors de remplacer ϕ par $\theta \cdot \phi$.

COROLLAIRE. *Soient X et Y deux courbes holomorphes et soit u une application holomorphe de X dans Y. Si u est injective au voisinage d'un point, elle est de rang* 1 *en ce point.*

On conserve les notations et les hypothèses de la proposition 1. L'entier $m-1$ est indépendant des cartes ϕ et ψ. On l'appelle l'*indice de ramification de u au point x_0* et on le désigne par $v_{x_0}(u)$. On dit que x_0 est un *point de ramification de u* si $v_{x_0}(u)$ est strictement positif. Pour que x_0 soit un point de ramification de u, il faut et il suffit que le rang de u au point x_0 soit nul (autrement dit, les points de ramification sont exactement les points critiques). L'ensemble des points de ramification est fermé et discret.

Supposons de plus X et Y connexes et u propre (ce qui implique que u est surjective en vertu du théorème 1). L'image B des points de ramification de u (i.e. l'ensemble des valeurs critiques) est fermé discret, de même que son image réciproque A. La restriction de u à $X \backslash A$ est un revêtement de $Y \backslash B$ dont le nombre de feuillets est le degré de u (chap. 0, § 4, théorème 4). Il résulte immédiatement des définitions que l'on a

$$\deg(u) = \sum_{x \in u^{-1}(y)} v_x(u)$$

pour tout point y de Y.

Dans toute la suite, on désigne par X une courbe holomorphe que l'on suppose connexe pour fixer les idées.

Soit π un fibré en droites holomorphe sur X et soit ϕ une carte de X centrée en un point x. Tout germe non nul s de $\mathscr{H}(\pi)_x$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s = \phi_x^m v$$

où m est un entier relatif appelé l'*ordre de* s et v un germe de $\mathcal{O}(\pi)_x$ ne s'annulant pas en x. En particulier, les zéros et les pôles d'une section méromorphe s non identiquement nulle sont isolés. On vérifie aisément que l'ordre du germe s_x coïncide avec l'ordre de s au point x. Le lemme suivant en découle aussitôt (chap. 0, § 5, proposition 2).

LEMME 1. *Supposons* X *compacte. Toutes les sections méromorphes de* π *ont pour ordre la classe de Chern de* π.

En particulier, toutes les fonctions méromorphes sur X *sont d'ordre* 0.

La deuxième assertion s'exprime aussi en disant que le nombre de pôles d'une fonction méromorphe est égal au nombre de ses zéros.

LEMME 2. *Soit* u *une application holomorphe non constante de* X *dans une courbe holomorphe* Y.

(1) Pour toute fonction méromorphe h *sur* Y *et pour tout point* x *de* X, *on a*

$$0_x(u^*(h)) = (v_x(u) + 1)\, 0_{u(x)}(h)\,.$$

(2) Pour toute forme différentielle méromorphe s *sur* Y *et pour tout point* x *de* X, *on a*

$$0_x(u^*(s)) = (v_x(u) + 1)\, 0_{u(x)}(s) + v_x(u)\,.$$

C'est une conséquence immédiate des définitions.

Soit u une fonction méromorphe sur X et soit $\tilde{u}$ la fonction holomorphe sur $R(u)$ qui lui est associée. On identifie $\mathbf{C}$ à l'ensemble ouvert U_0 de $\mathbf{P}^1$ défini par

$$U_0 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbf{P}^1 \mid z_0 \neq 0\}$$

et l'on prolonge $\tilde{u}$ en posant

$$\tilde{u}(x) = (0:1)$$

pour tout pôle x de u. On vérifie aisément que l'application $\tilde{u}$ de X dans $\mathbf{P}^1$ ainsi définie est holomorphe. On identifie de cette manière les fonctions méromorphes sur X aux applications holomorphes de X dans $\mathbf{P}^1$ non identiquement égales à (0: 1) [1]).

Si X est compacte, on peut en particulier parler du *degré d'une fonction méromorphe* non constante: c'est le degré de l'application holomorphe

[1]) On prendra garde que cette identification n'est plus possible si X est de dimension strictement supérieure à 1.

correspondante. Il résulte de ces définitions que c'est aussi le nombre de pôles (avec multiplicité) ou le nombre de zéros (avec multiplicité) de cette fonction.

Soit x un point de X et soit s une forme différentielle holomorphe sur $X \backslash \{x\}$. Pour toute carte ϕ de domaine U centrée en x, telle que $\phi(U)$ soit un disque de $\mathbf{C}$, on a

$$s \mid_U = f\, d\phi \qquad \text{et} \qquad f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \phi^k$$

où f est une fonction holomorphe sur $U \backslash \{x\}$ et $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ une famille de nombres complexes (§ 1, théorème 1, corollaire 6). La formule suivante permet de calculer le résidu de s au point x (chap. 0, § 5)

$$\text{Rés}(s, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} s = \sum_{k \in Z} a_k \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \phi^k\, d\phi = a_{-1}$$

où D désigne un disque de centre x relativement compact dans ϕ.

Soit π un fibré vectoriel holomorphe de rang pur p sur X et soit u une partie principale de π. Pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert U de x et une section méromorphe s de π sur U représentant $u \mid_U$. On peut toujours supposer que U est le domaine commun à une carte Φ de π et à une carte ϕ de X centrée en x et que de plus $\phi(U)$ est un disque. L'expression de s dans Φ est alors un p-uple $(s_1, \ldots, s_p)$ de fonctions méromorphes sur U et l'on a

$$s_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{j,k} \phi^k$$

pour tout entier j compris entre 1 et p. Notons que les $a_{j,k}$ d'indice strictement négatif sont presque tous nuls (§ 1, théorème 1, corollaire 7). La restriction de u à U est représentée par le p-uple

$$\left(\sum_{k<0} a_{1,k} \phi^k, \ldots, \sum_{k<0} a_{p,k} \phi^k \right).$$

En particulier, l'ensemble des points de X où u est non nul est fermé discret.

Soit u un diviseur de X et soit x un point de X. Il existe un fibré en droites holomorphe π sur X et une section méromorphe s non nulle de π dont le diviseur est u (§ 3, lemme 3). L'ordre de s au point x (ou l'ordre de s si X est compacte) ne dépend que de u *(loc. cit.)*. On l'appelle l'*ordre de* u *au point* x (ou l'*ordre de* u) et on le désigne par $0_x(u)$ (resp. $0(u)$).

L'application $\chi(u)$ de X dans $\mathbf{Z}$ définie par

$$\chi(u)(x) = 0_x(u)$$

est nulle en dehors d'un ensemble fermé discret. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions.

LEMME 3. *L'application* χ *induit un isomorphisme de* $\mathscr{D}(X)$ *sur l'ensemble des applications de* X *dans* $\mathbf{Z}$ *dont le support est fermé discret. Les diviseurs positifs correspondent aux applications à valeurs dans* $\mathbf{N}$.

Soient X et Y deux courbes holomorphes connexes et soit u une application holomorphe propre, non constante de degré p de X dans Y.

On désigne par $h_1, \ldots, h_n$ des fonctions méromorphes sur X et par σ un polynôme de

$$\mathbf{C}\left[T_{jk}\right]_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p}$$

symétrique en $T_{j1}, \ldots, T_{jp}$ pour j fixé. Désignons par B l'image des points de ramification de u et des pôles de $h_1, \ldots, h_n$. Pour tout point y de $Y \backslash B$, la fibre $u^{-1}(y)$ contient exactement p points $x_1, \ldots, x_p$ et l'on pose

$$u_\sigma(h_1, \ldots, h_n)(y) = \sigma(h_j(x_k)) .$$

L'hypothèse faite sur σ montre que cette définition est indépendante de la numérotation des points $x_1, \ldots, x_p$.

PROPOSITION 2. *La fonction* $u_\sigma(h_1, \ldots, h_n)$ *est holomorphe (resp. méromorphe) sur* Y *si* $h_1, \ldots, h_n$ *sont holomorphes (resp. méromorphes) sur* X.

Supposons tout d'abord $h_1, \ldots, h_n$ holomorphes et montrons qu'il en est de même de

$$w = u_\sigma(h_1, \ldots, h_n) .$$

Pour tout ensemble ouvert simplement connexe V de $Y \backslash B$, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est formé de p composantes connexes $U_1, \ldots, U_p$ et la restriction de u à chacun des U_k est un isomorphisme sur V. On désigne par v_k l'isomorphisme réciproque. On a alors

$$w \mid_V = \sigma(h_j \cdot v_k)$$

ce qui montre déjà que $w \big|_{Y \backslash B}$ est holomorphe. De plus, la fonction w reste bornée au voisinage de tout point de B, ce qui démontre l'assertion (§ 1, théorème 1, corollaire 7).

Supposons maintenant $h_1, \ldots, h_n$ méromorphes et σ homogène de degré q. Le raisonnement précédent montre que $w \big|_{Y \backslash B}$ est holomorphe. Soit ψ une carte de Y centrée en un point y de B. La fonction $\psi \cdot u$ s'annule en tout point de $u^{-1}(y)$. Il existe par conséquent un entier naturel m tel que les fonctions $(\psi \cdot u)^m h_j$ soient holomorphes au voisinage de $u^{-1}(y)$. On a alors

$$u_\sigma((\psi \cdot u)^m h_1, \ldots, (\psi \cdot u)^m h_n) = (\psi \cdot u)^{mq} u_\sigma(h_1, \ldots, h_n)$$

et l'assertion résulte de la première partie de la démonstration.

Désignons par s une forme différentielle méromorphe sur X et par B l'image des points de ramification de u et des pôles de s. Pour tout ensemble ouvert simplement connexe V de $Y \backslash B$, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est formé de p composantes connexes $U_1, \ldots, U_p$ et la restriction de u à chacun des U_k est un isomorphisme sur V. On désigne par v_k l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$w = v_1^*(s) + \ldots + v_p^*(s).$$

La forme différentielle w est holomorphe sur V et l'on obtient par recollement une forme différentielle holomorphe $u_*(s)$ sur $Y \backslash B$.

PROPOSITION 3. *La forme différentielle* $u_*(s)$ *est holomorphe (resp. méromorphe) sur* Y *si* s *est holomorphe (resp. méromorphe) sur* X.

La démonstration est laissée en exercice au lecteur. Elle est tout à fait analogue à celle de la proposition 2.

§ 5. EXEMPLES

(1) Quelques remarques sur la droite projective.

On fait opérer le groupe $G(2; \mathbf{C})$ des matrices carrées inversibles d'ordre 2 dans $\mathbf{P}^1$ par la formule

$$(w_0 : w_1) = (z_0 : z_1) \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = (dz_0 + cz_1 : bz_0 + az_1).$$

Cette opération est continue. Dans $\mathbf{C}$, identifié à l'ensemble

$$U_0 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbf{P}^1 \mid z_0 \neq 0\},$$

cette formule prend l'aspect suivant

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Une transformation de ce type est un automorphisme de $\mathbf{P}^1$ appelé *homographie*. Le noyau de l'opération contenant les homothéties, on peut se restreindre au groupe $Sl(2; \mathbf{C})$ des matrices de déterminant 1. Le noyau est alors réduit au centre de $Sl(2; \mathbf{C})$, i.e. le sous-groupe d'ordre 2 formé de l'identité et de son opposé. Ainsi le groupe des homographies apparaît comme le quotient de $Sl(2; \mathbf{C})$ par son centre.

Le groupe d'isotropie du point $(0:1)$ s'identifie au sous-groupe de $G(2;\mathbf{C})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ce sont aussi les homographies qui opèrent sur $\mathbf{C}$.

PROPOSITION 1. *(1) Les automorphismes de* $\mathbf{C}$ *sont exactement les homographies laissant fixe le point* $(0:1)$.

(2) Les automorphismes de $\mathbf{P}^1$ *sont exactement les homographies.*

Soit u un automorphisme de $\mathbf{C}$. On peut écrire

$$u(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k z^k$$

où les a_k sont des nombres complexes et où la série converge uniformément sur tout ensemble compact de $\mathbf{C}$. Puisque u est un homéomorphisme, il résulte du théorème de Weierstrass (§ 1, théorème 1, corollaire 7) que les a_k sont presque tous nuls. Le théorème fondamental de l'algèbre montre que le polynôme u est de degré au plus 1, ce qui démontre la première assertion.

Démontrons la seconde. Puisque le groupe des homographies contient le groupe d'isotropie de $(0:1)$, il suffit de vérifier qu'il opère transitivement sur $\mathbf{P}^1$, ce qui est trivial.

Tout ensemble ouvert d'une courbe holomorphe est une courbe holomorphe. En particulier, les ensembles

$$\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 \} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$$

sont des courbes holomorphes. Remarquons que l'homographie ω définie par

$$\omega(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

induit un isomorphisme de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{D}$. Avant de décrire les automorphismes de ces deux courbes, nous allons établir un lemme qui nous sera utile par la suite.

Désignons par X un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $\mathbf{C}$ et par G le groupe des automorphismes de X. Pour tout élément g du groupe d'isotropie G_0 de l'origine, on pose

$$j(g) = \frac{\partial g}{\partial z}(0).$$

On définit ainsi un homomorphisme j de G_0 dans $\mathbf{C}^*$.

LEMME 1. *On suppose* X *borné.*

(1) Le nombre complexe $j(g)$ *est de module* 1.

(2) Si $j(g)$ *est égal à* 1, *alors* g *est l'identité.*

Les deux assertions sont évidentes si g est linéaire. Sinon, on peut écrire

$$g(z) = a_1 z + \sum_{\nu \geqq n} a_\nu z^\nu$$

pour tout point z suffisamment voisin de l'origine, où les a_ν sont des nombres complexes tels que

$$a_1 = j(g) \qquad \text{et} \qquad a_n \neq 0\,.$$

Pour tout entier naturel k, on a de même

$$g^k(z) = b_1{}^{(k)} z + \sum_{\nu \geqq n} b_\nu{}^{(k)} z^\nu$$

et un calcul élémentaire fournit les relations

$$b_1{}^{(k)} = a_1^k \qquad \text{et} \qquad b_n{}^{(k)} = a_1^{k-1} a_n \sum_{0 \leqq \nu < k} (a_1^{n-1})^\nu\,.$$

Puisque X est borné, il résulte de la formule de Cauchy (§ 1, théorème 1, corollaire 1) qu'il existe une constante M telle que

$$|\, b_n{}^{(k)} \,| = |\, a_1^{k-1} a_n \sum_{0 \leqq \nu < k} (a_1^{n-1})^\nu \,| \leqslant M$$

pour tout entier naturel k. Ceci n'est possible que si $|\, a_1 \,|$ est au plus égal à 1. Le même raisonnement appliqué à l'automorphisme g^{-1} démontre la première assertion.

Supposons a_1 égal à 1. La formule ci-dessus montre que l'on a

$$b_n{}^{(k)} = k a_n \qquad \text{et} \qquad |\, b_n{}^{(k)} \,| = |\, k a_n \,| \leqslant M$$

ce qui est absurde, et par conséquent g est l'identité.

Revenons à nos homographies. Remarquons tout d'abord que les homographies laissant fixe $\mathbf{H}$ sont exactement celles à coefficients réels et de déterminant positif. Ceci résulte immédiatement des définitions. Notons que dans ce cas on a l'égalité

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|\, cz + d \,|^2}\,.$$

En utilisant l'isomorphisme ω, on montre aisément que les homographies laissant fixe $\mathbf{D}$ sont celles de la forme

$$w = \frac{\bar{p}z + \bar{q}}{qz + p} \qquad \text{avec} \qquad |p|^2 - |q|^2 = 1 .$$

Proposition 2. *(1) Les automorphismes de* $\mathbf{D}$ *sont exactement les homographies laissant fixe* $\mathbf{D}$.

(2) Les automorphismes de $\mathbf{H}$ *sont exactement les homographies laissant fixe* $\mathbf{H}$.

Il faut vérifier que le groupe des homographies laissant fixe $\mathbf{D}$ opère transitivement dans $\mathbf{D}$ ce qui est immédiat et qu'il contient le groupe d'isotropie de l'origine. Or le lemme 1 montre que ce dernier groupe est formé des rotations de centre 0, d'où l'assertion.

On appelle *fonction rationnelle sur* $\mathbf{C}$ toute fonction méromorphe s'écrivant comme le quotient de deux polynômes. Les fonctions rationnelles sur $\mathbf{C}$ forment un sous-corps de $\mathscr{K}(\mathbf{C})$ isomorphe au corps $\mathbf{C}(T)$ des fractions rationnelles à une indéterminée.

Lemme 2. *Les fonctions rationnelles sur* $\mathbf{C}$ *sont exactement les fonctions méromorphes sur* $\mathbf{P}^1$.

On vérifie aisément que toute fonction rationnelle sur $\mathbf{C}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ (il suffit d'exprimer cette fonction dans l'autre carte de $\mathbf{P}^1$). Réciproquement, soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1$. On désigne par u la restriction à $\mathbf{C}$ du diviseur de f et l'on pose

$$g(z) = \prod_{u(\zeta) \neq 0} (z - \zeta)^{-u(\zeta)} .$$

Ceci a bien un sens puisque le support de u est fini. Il est clair que g est une fonction rationnelle sur $\mathbf{C}$ donc méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ et que le diviseur de fg est nul en dehors du point $(0: 1)$. Cette dernière fonction est donc constante (§ 4, lemme 1), d'où l'assertion.

(2) Le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$.

Pour tout point x de $\mathbf{C}$, on désigne par $\mathcal{O}_x$ l'anneau des germes en x de fonctions holomorphes. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble $\coprod_{x \in X} \mathcal{O}_x$ et soit π la projection canonique de $\mathcal{O}$ dans **C**. Pour tout ensemble ouvert U de **C** et toute fonction holomorphe f sur U, on pose

$$N(U,f) = \{(x,u) \in \mathcal{O} \mid x \in U \quad \text{et} \quad u = f_x\}.$$

PROPOSITION 3. *Les ensembles du type $N(U,f)$ forment une base de topologie sur $\mathcal{O}$. Pour cette topologie, l'espace $\mathcal{O}$ est séparé et la projection π est un homéomorphisme local.*

Si l'ensemble $N(U,f) \cap N(V,g)$ est non vide, il existe par définition un point x de $U \cap V$ où les germes f_x et g_x coïncident. Les fonctions f et g coïncident donc sur un voisinage ouvert W de x dans $U \cap V$. On en déduit que l'ensemble

$$N(W,f) = N(W,g)$$

est contenu dans $N(U,f) \cap N(V,g)$, ce qui démontre la première assertion.

Munissons $\mathcal{O}$ de la topologie engendrée par les $N(U,f)$. Soient (x,f_x) et (y,g_y) deux points distincts de $\mathcal{O}$. On désigne par U et V des voisinages ouverts de x et y respectivement sur lesquels f et g sont holomorphes. L'ensemble $N(U,f)$ est un voisinage de (x,f_x) et l'ensemble $N(V,g)$ un voisinage de (y,g_y). Si x et y sont distincts, on peut supposer U et V disjoints. Il en est alors de même de $N(U,f)$ et $N(V,g)$. Si x et y sont confondus, on peut supposer U et V connexes et égaux. Les germes de f et g sont distincts au point x, donc en tout point de U (principe du prolongement analytique). Ceci montre que $\mathcal{O}$ est séparé.

La dernière assertion est triviale.

Il résulte de la proposition 3 et du théorème de Poincaré-Volterra (appendice II, théorème 1) que toute composante connexe de $\mathcal{O}$ est une surface topologique (de type dénombrable). On la munit de l'unique structure holomorphe faisant de π un isomorphisme local.

Chacune des composantes connexes de $\mathcal{O}$ est donc une courbe holomorphe ouverte.

Soit X la composante connexe d'un point (x,f_x) de $\mathcal{O}$. La fonction $\tilde{f}$ définie sur X par

$$\tilde{f}(y,u) = u(y)$$

est holomorphe. En effet, pour tout voisinage ouvert U de y et toute fonction holomorphe g sur U dont le germe au point y est égal à u, on a

$$\tilde{f} = g \cdot \pi.$$

On dit que $\tilde{f}$ est le *prolongement analytique de* f.

(3) Quotients de courbes holomorphes

Dans tout ce numéro, on désigne par X une courbe holomorphe connexe, par G le groupe des automorphismes de X et par Γ un sous-groupe proprement discontinu de G [1]).

LEMME 3. *(1) L'espace des orbites* X/Γ *est séparé.*

(2) Pour tout point x_0, *le groupe d'isotropie* Γ_{x0} *est fini et il existe un système fondamental de voisinages* U *de* x_0 *vérifiant les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \gamma(U) \cap U = \varnothing & \text{si } \gamma \notin \Gamma_{x0} \\ \gamma(U) = U & \text{si } \gamma \in \Gamma_{x0}. \end{cases}$$

Désignons par π la projection canonique de X sur X/Γ. Pour démontrer (1), il faut montrer que la diagonale de $X/\Gamma \times X/\Gamma$ est fermée ou ce qui revient au même que son image réciproque A par $\pi \times \pi$ est fermée dans $X \times X$. Par définition, on a

$$A = \{ (x, y) \in X \times X \mid \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma(x) \}.$$

Désignons par $(x_n, y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de A qui converge vers un point (x, y) de $X \times X$ et soient K et L des voisinages compacts de x et y respectivement. Pour n suffisamment grand, le point x_n appartient à K et le point y_n appartient à L. On désigne par γ_n un élément de Γ transformant x_n en y_n. Par hypothèse, il existe une infinité d'entiers n pour lesquels γ_n coïncide avec un élément fixe γ de Γ. On en déduit que γ transforme x en y, d'où l'assertion.

Démontrons (2). Soit K un voisinage compact de x_0. On pose

$$S = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing \}$$

et l'on désigne par $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ les éléments de $S \backslash \Gamma_{x0}$. Pour tout entier j compris entre 1 et n, il existe un voisinage V_j de x_0 dans K tel que $V_j \cap \gamma_j(V_j)$ soit vide. Il suffit alors de poser

$$U = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gamma \in \Gamma_{x0}}} \gamma(V_j).$$

LEMME 4. *Pour tout point* x_0 *de* X, *le groupe d'isotropie* Γ_{x0} *est cyclique.*

Désignons par U un voisinage connexe de x_0 vérifiant les conditions du lemme 3. On peut supposer que U est le domaine d'une carte ϕ centrée

[1]) Ceci signifie que pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble

$$\{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing \}$$

est fini.

en x_0 et que $\phi(U)$ est borné. L'expression d'un élément γ de Γ_{x_0} dans la carte ϕ est alors un automorphisme γ_ϕ de $\phi(U)$ laissant fixe l'origine et le lemme 2 montre que l'application η de Γ_{x_0} dans $\mathbf{C}^*$ définie par

$$\eta(\gamma) = j(\gamma_\phi)$$

est un homomorphisme injectif de Γ_{x_0} dans $\mathbf{U}$, ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1. *Désignons par π la projection canonique de X dans l'espace des orbites X/Γ. Il existe une structure holomorphe et une seule sur X/Γ vérifiant la condition suivante :*

(Q) Pour tout ensemble ouvert U de X/Γ, l'application π^* induit une bijection de $\mathcal{O}(U)$ sur l'ensemble des fonctions holomorphes Γ-invariantes de $\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$.

L'unicité résulte immédiatement de la condition (Q) (§ 2, lemme 1). Désignons par Y l'espace des orbites X/Γ. Les points fixes d'un automorphisme γ distinct de l'identité sont isolés (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Il résulte alors du lemme 3 que l'ensemble A des points fixes de Γ (i.e. l'ensemble de tous les points fixes des automorphismes de Γ distincts de l'identité) est fermé discret, de même que son image B. Ce lemme montre aussi que la restriction de π à $X \backslash A$ est un revêtement de $Y \backslash B$. On munit $Y \backslash B$ de l'unique structure holomorphe qui fait de π un isomorphisme local. Il est clair que la condition (Q) est vérifiée pour tout ensemble ouvert U de $Y \backslash B$.

Il reste à prolonger la structure holomorphe de $Y \backslash B$ aux points de B. La question étant locale, on peut supposer que X est un voisinage ouvert borné de l'origine dans $\mathbf{C}$ et que tous les éléments de Γ laissent fixe l'origine. En particulier, le groupe Γ est fini cyclique d'ordre p. On définit une fonction holomorphe h sur X en posant

$$h(z) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(z)$$

L'ordre de h à l'origine étant p, on peut supposer en diminuant au besoin X que h est de la forme

$$h = u^p$$

où u est un isomorphisme de X sur un voisinage de l'origine (§ 4, proposition 1). La fonction h étant Γ-invariante, elle définit par passage au quotient une application continue ϕ de Y sur l'image Z de h. Quitte à diminuer Z, on peut supposer que la restriction de h (resp. π) à $X \backslash \{0\}$ est un revêtement à p feuillets de $Z \backslash \{0\}$ (resp. $Y \backslash \{\pi(0)\}$). En particulier, l'application ϕ est un homéomorphisme de Y sur Z induisant un isomorphisme de $Y \backslash \{\pi(0)\}$

sur $Z \backslash \{0\}$. Autrement dit, cette application est une carte de Y compatible avec la structure holomorphe de $Y \backslash \{\pi(0)\}$.

Il reste à voir que la structure holomorphe ainsi définie vérifie la condition (Q). Tout d'abord, l'application π est holomorphe par définition. D'autre part, toute fonction Γ-invariante f sur X définit par passage au quotient une fonction continue sur Y qui est holomorphe sur $Y \backslash \{\pi(0)\}$. Le théorème de Weierstrass (§ 1, théorème 1, corollaire 7) montre qu'elle est holomorphe sur Y ce qui achève la démonstration du théorème.

Avant de donner des exemples concrets, nous allons établir un critère permettant de reconnaître aisément si un sous-groupe Γ du groupe des automorphismes de $\mathbf{D}$ (ou de $\mathbf{H}$) est proprement discontinu. Rappelons tout d'abord que le groupe des automorphismes de $\mathbf{D}$ (ou de $\mathbf{H}$) est naturellement muni d'une topologie (et même d'une structure de groupe de Lie), à savoir celle provenant de la topologie de $G(2; \mathbf{C})$ (numéro 1).

LEMME 5. *Pour qu'un sous-groupe Γ du groupe des automorphismes de* $\mathbf{D}$ *(ou de* $\mathbf{H}$) *soit proprement discontinu, il faut et il suffit qu'il soit discret.*

La condition est évidemment nécessaire: si une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de Γ converge vers l'identité, la suite $(\gamma_n(0))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 et Γ ne peut pas être proprement discontinu.

Montrons qu'elle est suffisante. Désignons par

$$w = \frac{\bar{p}z + \bar{q}}{qz + p} \quad \text{avec} \quad |p|^2 - |q|^2 = 1$$

une transformation de Γ (proposition 2). Un calcul élémentaire montre que l'on a

$$1 - |w|^2 = \frac{1 - |z|^2}{|qz + p|^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{q}{p}\right| < 1 .$$

Soit r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. Si z et w sont tous deux de module au plus égal à r, on a

$$|qz + p| = |p| \left|\frac{q}{p} z + 1\right| \geqq |p|(1-r) \quad \text{et} \quad 1 - r^2 \leqq \frac{1}{|p|^2 (1-r)^2} .$$

On en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de Γ transformant un point z de module au plus égal à r en un point w de module au plus égal à r, d'où l'assertion.

Désignons par ω_1 et ω_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$ et par Γ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{C}$ engendré par les translations

$$\gamma_1(z) = z + \omega_1 \quad \text{et} \quad \gamma_2(z) = z + \omega_2 .$$

Il est clair que Γ est proprement discontinu et n'a pas de points fixes. La courbe holomorphe $\mathbf{C}/\Gamma$ se désigne par $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$. Elle est compacte et connexe et l'application canonique de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$ est le revêtement universel de $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$.

On appelle *courbe elliptique* toute courbe holomorphe isomorphe à une courbe de la forme $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$. Remarquons que le groupe des automorphismes d'une courbe elliptique opère de manière transitive.

Nous allons chercher à quelles conditions deux courbes elliptiques sont isomorphes.

Tout d'abord, quitte à remplacer ω_1 par $-\omega_1$, on peut supposer que le nombre complexe défini par

$$\tau = \omega_1 \, \omega_2^{-1}$$

a une partie imaginaire strictement positive. Considérons ensuite l'automorphisme θ de $\mathbf{C}$ défini par

$$\theta(z) = \omega_2^{-1} z .$$

Par passage aux quotients, il définit un isomorphisme de $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$ sur $\mathbf{T}(\tau, 1)$. Pour étudier une courbe elliptique, on peut donc toujours supposer qu'elle est de la forme $\mathbf{T}(\tau, 1)$ avec τ dans $\mathbf{H}$. Un tel nombre complexe s'appelle un *module de la courbe elliptique.*

Soient X et Y deux courbes elliptiques et soit u un isomorphisme de X sur Y. On désigne par π et ρ les revêtements universels de $\mathbf{C}$ dans X et Y respectivement. Quitte à modifier u par un automorphisme de Y, on peut supposer que l'on a

$$u\big(\pi(0)\big) = \rho(0) .$$

Il existe alors un automorphisme v de $\mathbf{C}$ et un seul tel que

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \rho \cdot v = u \cdot \pi .$$

Cet automorphisme est de la forme

$$v(z) = \alpha z$$

où α est un nombre complexe non nul (proposition 1). De plus, puisqu'il passe aux quotients, il existe des entiers relatifs a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} \alpha\tau = a\sigma + b \\ \alpha \;\, = c\sigma + d \end{cases} \quad \text{et} \quad ad - bc = 1 ,$$

en désignant par τ et σ des modules de X et Y respectivement. On en déduit que X et Y sont isomorphes si et seulement si les modules τ et σ sont dans la même orbite pour l'action de $Sl\,(2; \mathbf{Z})$.

Le quotient de $Sl\,(2; \mathbf{Z})$ par son centre est un sous-groupe discret Γ du groupe des automorphismes de $\mathbf{H}$. Il résulte alors du lemme 5 et du théorème 1 qu'il existe sur $\mathbf{H}/\Gamma$ une structure holomorphe canonique. On notera que les classes d'isomorphie de courbes elliptiques sont en correspondance biunivoque avec les points de $\mathbf{H}/\Gamma$.

Remarque 1.

La courbe $\mathbf{H}/\Gamma$ est isomorphe à $\mathbf{C}$. Ceci résulte par exemple de l'existence et des propriétés de la fonction modulaire J ([3], Kap. IV, § 3, Satz 3).

(4) Courbes algébriques

On dit qu'une partie X de l'espace numérique $\mathbf{C}^n$ est *algébrique* si elle est le lieu des zéros d'une famille de polynômes. L'ensemble $\underline{a}$ des polynômes de $\mathbf{C}\,[T_1, ..., T_n]$ qui s'annulent sur X est un idéal que l'on appelle l'*idéal de* X. On notera que X est aussi le lieu des zéros de toute famille de générateurs de $\underline{a}$. En particulier, le théorème de la base de Hilbert ([4], chap. VI, § 2, théorème 1) montre que X est le lieu des zéros d'une famille finie de polynômes.

Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{C}^n$ et soit $\underline{a}$ son idéal.

On dit qu'une fonction définie sur X et à valeurs complexes est *régulière* si elle est la restriction d'une fonction polynomiale sur $\mathbf{C}^n$. L'ensemble des fonctions régulières sur X est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^\circ\,(X, \mathbf{C})$ qui s'identifie canoniquement à $\mathbf{C}\,[T_1, ..., T_n]/\underline{a}$.

On dit qu'un point x de X est *régulier* s'il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{C}^n$ tel que $U \cap X$ soit une sous-variété (holomorphe) de U. Un point est dit *singulier* s'il n'est pas régulier.

Il résulte de cette définition que l'ensemble des points réguliers de X est une partie ouverte de X et une sous-variété localement fermée de $\mathbf{C}^n$.

On dit que X est *irréductible* s'il satisfait l'une des conditions suivantes dont on vérifie aisément qu'elles sont équivalentes:

(1) L'idéal $\underline{a}$ est premier.

(2) Si X est réunion de deux ensembles algébriques, l'un au moins est égal à X.

Supposons X irréductible. On appelle *dimension algébrique de* X le degré de transcendance du corps des fractions de l'anneau $\mathbf{C}\,[T_1, ..., T_n]/\underline{a}$.

On appelle *courbe algébrique affine* tout ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique 1 dans un certain espace numérique.

LEMME 5. *Soient z, $a_1, \ldots, a_k$ des nombres complexes vérifiant la relation*

$$z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k = 0 .$$

On a l'inégalité

$$|z| \leqslant 2 \max_{1 \leq j \leq k} |a_j|^{1/j} .$$

Désignons par r le maximum des $|a_j|^{1/j}$. On peut supposer r non nul et l'on a

$$\left(\frac{z}{r}\right)^k + \frac{a_1}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{k-1} + \ldots + \frac{a_k}{r^k} = 0 .$$

On en déduit que

$$\left|\frac{z}{r}\right|^k \leqslant 1 + \left|\frac{z}{r}\right| + \ldots + \left|\frac{z}{r}\right|^{k-1}$$

ce qui démontre l'assertion.

LEMME 6. *Soit U un voisinage ouvert connexe du point* (0: 1) *dans* $\mathbf{P}^1$ *et soient $u_0, \ldots, u_k$ des fonctions méromorphes sur U. On suppose que u_0 est non nulle. Il existe alors des nombres réels r et M strictement positifs et un entier relatif m tels que*

$$|z_1^m z_2| \leqslant M$$

pour tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes vérifiant les relations

$$|z_1| \geqslant r \qquad et \qquad u_0(z_1) z_2^k + \ldots + u_k(z_1) = 0 .$$

Soit m un entier vérifiant la relation

$$m \leqslant \inf_{1 \leq j \leq k} \frac{0_{(0:1)}(u_j) - 0_{(0:1)}(u_0)}{j}$$

et soit r un nombre réel strictement positif tel que u_0 soit holomorphe inversible et les $u_1, \ldots, u_k$ holomorphes au voisinage de la couronne

$$C = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| \geqslant r \} .$$

Pour tout entier j compris entre 1 et n, on définit une fonction holomorphe au voisinage de C en posant

$$w_j(z) = u_j(z) u_0(z)^{-1} z^{mj} .$$

L'ordre au point (0: 1) de cette fonction étant positif, on pose

$$M = 2 \max_{1 \leq j \leq k} \| w_j \|_C^{1/j} .$$

Si (z_1, z_2) est un couple de nombres complexes vérifiant les conditions de l'énoncé, on a

$$(z_1^m z_2)^k + w_1(z_1)(z_1^m z_2)^{k-1} + \ldots + w_k(z_1) = 0 .$$

On conclut en appliquant le lemme 5.

LEMME 7. *Soit X un sous-ensemble algébrique strict de $\mathbf{C}^n$ et soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^n \backslash X$. Si f est bornée au voisinage de chaque point de $\mathbf{C}^n$, elle se prolonge en une unique fonction holomorphe g sur $\mathbf{C}^n$. Si de plus il existe une constante M et un entier naturel k tels que*

$$|f(z)| \leqslant M |z|^k$$

pour tout point z de $\mathbf{C}^n \backslash X$, alors g est polynomiale.

Soit ζ un point de $\mathbf{C}^n$. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'il existe un polydisque $D' \times D''$ de centre ζ dans $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$ tel que

$$(D' \times \partial D'') \cap X = \varnothing$$

(§ 3, démonstration lemme 1). Supposons f bornée sur $D' \times D''$. Pour tout point $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ de D', la fonction partielle $f(z_1, \ldots, z_{n-1},)$ se prolonge en une fonction holomorphe $g(z_1, \ldots, z_{n-1},)$ sur D'' (§ 1, théorème 1, corollaire 1) et l'on a

$$g(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D''} \frac{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, z)}{z - z_n} dz$$

pour tout point z_n de D''. On vérifie aisément que cette fonction g est holomorphe sur $D' \times D''$, ce qui démontre la première assertion.

Démontrons la seconde. Il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ de nombres complexes telle que

$$g(z) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha \quad \text{et} \quad |a_\alpha| \leqslant M r^{k-|\alpha|}$$

pour tout nombre réel strictement positif r (§ 1, théorème 1, corollaire 1). L'assertion en découle aussitôt.

Pour la commodité du lecteur, les résultats d'algèbre nécessaires à la démonstration du théorème suivant sont groupés dans l'appendice III.

THÉORÈME 2. *Soit* X *un ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique* k. *Il existe des fonctions régulières* $u_1, \ldots, u_k$ *sur* X *et un ensemble algébrique* N *de* $\mathbf{C}^k$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'application $u = (u_1, \ldots, u_k)$ *de* X *dans* $\mathbf{C}^k$ *est propre à fibres finies.*

(2) Tous les points de $X \setminus u^{-1}(N)$ *sont réguliers et la restriction de* u *à cet ensemble est un isomorphisme local (donc en particulier un revêtement fini de* $\mathbf{C}^k \setminus N$ *d'après (1)).*

(3) L'ensemble $X \setminus u^{-1}(N)$ *est connexe et dense dans* X.

Supposons X plongé dans l'espace numérique $\mathbf{C}^n$. On désigne par A l'anneau $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_k]$, par K son corps des fractions, par B l'anneau des fonctions régulières sur X et par L son corps des fractions. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées dans $\mathbf{C}^n$, on peut supposer que l'on est dans la situation suivante:

(a) Les classes $u_1, \ldots, u_k$ de $T_1, \ldots, T_k$ dans B sont algébriquement indépendantes. Elles engendrent un sous-anneau sur lequel B est entier. Autrement dit, l'application canonique de A dans $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$ induit une injection de A dans B et B est un A-module de type fini.

(b) La classe α de T_{k+1} dans B est un générateur de L sur K.

Désignons par p le polynôme minimal de α dans $K[T_{k+1}]$. C'est un polynôme monique irréductible, et puisque α est entier sur A et A factoriel, il appartient à $A[T_{k+1}]$. On a donc un isomorphisme

$$A[T_{k+1}]/(p) \simeq A[\alpha] \subset B .$$

Désignons par m le degré de p et par Δ son discriminant. On a les inclusions

$$\Delta B \subset A[\alpha] \subset B .$$

En particulier, il existe pour tout entier j compris entre $k+2$ et n un polynôme r_j de degré strictement inférieur à m dans $A[T_{k+1}]$ tel que le polynôme

$$q_j = \Delta T_j - r_j$$

appartienne à l'idéal $\underline{b}$ de X.

LEMME 8. *Il existe un entier naturel* ν *tel que* $\Delta^\nu \underline{b}$ *soit contenu dans l'idéal engendré par* $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$.

Désignons par q un polynôme de degré ν dans $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$. Modulo l'idéal engendré par $q_{k+2}, \ldots, q_n$, le polynôme $\Delta^\nu q$ est congru à un polynôme

r de $A\,[T_{k+1}]$ (à savoir le polynôme $\Delta^{\nu} q\,(T_1, \ldots, T_{k+1}, \Delta^{-1} r_{k+2}, \ldots, \Delta^{-1} r_n)$). La division euclidienne des polynômes montre que modulo l'idéal engendré par $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$, on peut choisir r de degré strictement inférieur à m. Si q appartient à $\underline{b}$, il en est de même de r qui est donc nul (car p est le polynôme minimal de α). Ceci montre que $\Delta^{\nu} q$ appartient à l'idéal engendré par $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$. On conclut en remarquant que $\underline{b}$ est de type fini.

Revenons à notre théorème. L'ensemble N des zéros de Δ est un sous-ensemble algébrique strict de $\mathbf{C}^k$ (car p est irréductible).

Démontrons (1). On voit comme précédemment que le polynôme minimal p_j de la classe de T_j appartient à $A\,[T_j]$ pour tout entier j compris entre $k+2$ et n. Tout point $(z_1, \ldots, z_n)$ de X vérifiant les équations

$$p\,(z_1, \ldots, z_{k+1}) = p_{k+2}\,(z_1, \ldots, z_k, z_{k+2}) = \ldots = p_n\,(z_1, \ldots, z_k, z_n) = 0\,,$$

l'assertion découle du lemme 5.

Démontrons (2). On définit une application ψ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{n-k}$ en posant

$$\psi\,(z_1, \ldots, z_n) =$$
$$\left(p\,(z_1, \ldots, z_{k+1}), q_{k+2}\,(z_1, \ldots, z_k, z_{k+2}), \ldots, q_n\,(z_1, \ldots, z_k, z_n)\right).$$

L'ensemble Z des zéros de ψ coïncide avec X sur $(\mathbf{C}^k \backslash N) \times \mathbf{C}^{n-k}$ (lemme 8). Puisque $\dfrac{\partial p}{\partial T_{k+1}}\,(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k+1})$ est non nul en tout point $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ de $X \backslash u^{-1}\,(N)$, l'application partielle $\psi\,(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, \;)$ est de rang $n-k$ au point $(\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n)$. On conclut à l'aide du théorème des fonctions implicites (appendice I, théorème 3).

Démontrons (3). On désigne par Y l'ensemble des zéros de p dans $\mathbf{C}^{k+1}$, par v_1 la restriction à Y de la première projection de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^k$ et par v_2 la restriction à X de la première projection de $\mathbf{C}^{k+1} \times \mathbf{C}^{n-k-1}$ dans $\mathbf{C}^{k+1}$. Il est clair que l'image de v_2 est contenue dans Y et que l'on a

$$u = v_1 \cdot v_2\,.$$

De plus, il résulte aisément de ce qui précède que v_2 induit un isomorphisme de $X \backslash u^{-1}\,(N)$ sur $Y \backslash v_1^{-1}\,(N)$. Démontrons par l'absurde que ce dernier ensemble est connexe. Supposons qu'il existe deux ensembles ouverts non vides disjoints Y' et Y'' recouvrant $Y \backslash u^{-1}\,(N)$. Pour tout point z de $\mathbf{C}^k \backslash N$, on pose

$$p'\,(z, T_{k+1}) = \prod_{(z, z_{k+1}) \in Y'} (T_{k+1} - z_{k+1})$$
$$p''\,(z, T_{k+1}) = \prod_{(z, z_{k+1}) \in Y''} (T_{k+1} - z_{k+1})\,.$$

On a par définition

$$p(z, T_{k+1}) = p'(z, T_{k+1})\, p''(z, T_{k+1})$$

et il suffit de montrer que les coefficients de p' et p'' sont des fonctions polynomiales. Tout d'abord, ces coefficients sont des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^k \backslash N$ (§ 4, proposition 2), et puisque v_1 est propre, ils demeurent bornés au voisinage de tout point de N. On conclut à l'aide des lemmes 6 et 7.

Il reste à montrer que $X \backslash u^{-1}(N)$ est dense dans X. C'est une conséquence immédiate de l'irréductibilité de X et du lemme suivant.

LEMME 9. *L'adhérence de* $X \backslash u^{-1}(N)$ *est un ensemble algébrique.*

Pour toute fonction polynomiale f sur $\mathbf{C}^n$ et pour tout point z de $\mathbf{C}^k \backslash N$, on pose

$$\theta_f(z, T) = \prod_{(z, z_{k+1}, \ldots, z_n) \in X} (T - f(z, z_{k+1}, \ldots, z_n)) .$$

On vérifie comme précédemment que les coefficients de θ_f sont des fonctions polynomiales. Nous allons montrer que l'adhérence V de $X \backslash u^{-1}(N)$ est égale à l'ensemble algébrique W défini par

$$W = \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid \theta_f(z_1, \ldots, z_k, f(z_1, \ldots, z_n)) = 0 \\ \text{pour tout } f \in \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n] \} .$$

Tout d'abord, il résulte des définitions que W contient V. Réciproquement, soit $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un point de W et montrons qu'il appartient à la fibre

$$E = u^{-1}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \cap V .$$

Raisonnons par l'absurde. Puisque E est fini, il existe un polynôme f qui s'annule au point $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ mais ne s'annule en aucun point de E. Ceci implique en particulier que 0 est une racine du polynôme $\theta_f(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, T)$. Il existe alors une suite $(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)})_{j \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{C}^k \backslash N$ qui converge vers $(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ et une suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{C}$ qui converge vers 0, telles que α_j soit une racine du polynôme $\theta_j(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)}, T)$ pour tout entier j (continuité des racines d'un polynôme).

On désigne par $z^{(j)}$ un point de $X \backslash u^{-1}(N)$ se projetant sur $(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)})$ tel que $f(z^{(j)})$ soit égal à α_j. La restriction de u à V étant propre, on peut supposer, quitte à passer à une sous-suite, que $(z^{(j)})_{j \in \mathbf{N}}$ converge vers un point z de V. On en déduit que

$$f(z) = \lim_{j \to \infty} f(z^{(j)}) = 0$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE. *L'ensemble des points singuliers d'une courbe algébrique affine* X *est fini. L'ensemble des points réguliers est une courbe holomorphe connexe et dense dans* X.

THÉORÈME 3. *Pour toute courbe algébrique* X *de* $\mathbf{C}^n$, *il existe une courbe holomorphe* $\tilde{X}$ *et une application holomorphe non constante* π *de* $\tilde{X}$ *dans* $\mathbf{C}^n$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image de π *est contenue dans* X.

(2) Pour toute courbe holomorphe Y *et toute application holomorphe* v *de* Y *dans* $\mathbf{C}^n$ *constante sur aucune composante connexe de* Y, *il existe une application holomorphe et une seule* $\tilde{v}$ *de* Y *dans* $\tilde{X}$ *telle que*

$$\pi \cdot \tilde{v} = v \, .$$

Le couple $(\tilde{X}, \pi)$ *est déterminé à isomorphisme près par ces conditions. De plus, l'application* π *est propre (à fibres finies). Elle induit un isomorphisme de* $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(A)$ *sur* $X \backslash A$, *en désignant par* A *l'ensemble des points singuliers de* X.

Désignons par u une fonction régulière sur X et par N un ensemble fini de $\mathbf{C}$ vérifiant les conditions du théorème 2. Pour tout point ζ de N, il existe un disque D de centre ζ et de rayon r dans $\mathbf{C}$ tel que la restriction de u à $u^{-1}(D \backslash \{\zeta\})$ soit un revêtement à m feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$. Désignons par $U_1, \ldots, U_p$ les composantes connexes de $u^{-1}(D \backslash \{\zeta\})$. La restriction de u à U_j est un revêtement à m_j feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$ et l'on a

$$m = m_1 + \ldots + m_p \, .$$

Désignons par D_j le disque centré à l'origine et de rayon r^{1/m_j} dans $\mathbf{C}$ et par ψ_j l'application de D_j dans D définie par

$$\psi_j(z) = z^{m_j} + \zeta \, .$$

La restriction de ψ_j à $D_j \backslash \{0\}$ est un revêtement à m_j feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$. Il existe donc un unique homéomorphisme h_j de $D_j \backslash \{0\}$ sur U_j rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} D_j \backslash \{0\} \arrow[rr, "h_j"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & & U_j \arrow[dl, "u"] \\ & D \backslash \{\zeta\} & \end{tikzcd} \, .$$

Cette application est en fait un isomorphisme. On désigne par $\tilde{X}$ l'espace obtenu en recollant $X \backslash u^{-1}(N)$ et les D_j au moyen des homéomorphismes h_j (lorsque ζ parcourt N), par π l'application réciproque de l'injection canonique de $X \backslash u^{-1}(N)$ dans $\tilde{X}$ et par ϕ_j l'application réciproque de l'injection canonique de D_j dans $\tilde{X}$. On vérifie aisément que $\tilde{X}$ est une surface topologique et que les ϕ_j sont des cartes holomorphiquement compatibles avec toute carte de $X \backslash u^{-1}(N)$. On munit $\tilde{X}$ de la structure holomorphe correspondante.

L'application π est une application holomorphe à valeurs dans $\mathbf{C}^n$, définie sur le complémentaire d'un ensemble fini de $\tilde{X}$. Puisqu'elle demeure bornée au voisinage de chaque point, elle se prolonge en une application holomorphe de $\tilde{X}$ dans $\mathbf{C}^n$.

Il est clair que l'application π est propre à fibres finies, que son image est contenue dans X et qu'elle induit un isomorphisme de $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$ (§ 4, proposition 1, corollaire). Il reste à vérifier la condition (2). L'image réciproque de A est un ensemble fini et l'on pose

$$\tilde{v} = \pi^{-1} \cdot v \,|_{X \backslash v^{-1}(A)} \,.$$

On vérifie aisément que $\tilde{v}$ se prolonge par continuité aux points de $v^{-1}(A)$ ce qui achève la démonstration du théorème.

Le couple $(\tilde{X}, \pi)$ construit dans le théorème 3 s'appelle la *normalisation* (ou la *désingularisation*) *de* X. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ce qui précède.

LEMME 10. *Soit X une courbe algébrique de $\mathbf{C}^n$ et soit v une application holomorphe d'une courbe holomorphe Y dans $\mathbf{C}^n$. On suppose que l'application v est propre (à fibre finies) et qu'elle induit un isomorphisme de $Y \backslash v^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de X. Alors (Y, v) est la normalisation de X.*

Tout polynôme p de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$p = p_0 + \dots + p_k$$

où p_j est homogène de degré j. Pour tout point x de $\mathbf{C}^{n+1}$ et tout nombre complexe λ, on a

$$p(\lambda x) = p_0 + \dots + \lambda^k p_k(x) \,.$$

En particulier, si p s'annule sur une partie de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ saturée pour la projection canonique ψ de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n$, il en est de même de chacun des p_j.

Pour tout polynôme homogène p de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$, l'ensemble des zéros de p dans $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ est saturé pour ψ. Son image dans $\mathbf{P}^n$ s'appelle (abusivement) le *lieu des zéros de* p.

On dit qu'une partie X de $\mathbf{P}^n$ est *algébrique* si elle est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes. L'ensemble $\underline{a}$ des polynômes de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$ qui s'annulent sur $\psi^{-1}(X)$ est un idéal homogène (i.e. engendré par des polynômes homogènes) que l'on appelle l'*idéal de* X. On notera que X est aussi le lieu des zéros de toute famille de générateurs de $\underline{a}$. En particulier, le théorème de la base de Hilbert montre que X est le lieu des zéros d'une famille finie de polynômes homogènes.

Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$ et soit $\underline{a}$ son idéal.

On dit qu'un point x de X est *régulier* s'il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{P}^n$ tel que $U \cap X$ soit une sous-variété (holomorphe) de U. Un point est dit *singulier* s'il n'est pas régulier.

Il résulte de cette définition que l'ensemble des points réguliers de X est une partie ouverte de X et une sous-variété localement fermée de $\mathbf{P}^n$.

Pour tout entier j compris entre 0 et n, la trace de X sur l'ensemble

$$U_j = \{(z_0 : ... : z_n) \in \mathbf{P}^n \mid z_j \neq 0\}$$

est un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{C}^n$ dont l'idéal est donné par la formule

$$\underline{a}_j = \{p \in \mathbf{C}[T_0, ..., \hat{T}_j, ..., T_n] \mid \text{ il existe } q \in \underline{a} \text{ tel que}$$

$$p = q(T_0, ..., 1, ..., T_n)\} .$$

C'est une conséquence immédiate des définitions.

On dit que X est *irréductible* s'il vérifie l'une des conditions suivantes dont on vérifie aisément qu'elles sont équivalentes:

(1) L'idéal $\underline{a}$ est premier.

(2) Si X est réunion de deux ensembles algébriques, l'un au moins est égal à X.

Supposons X irréductible. On vérifie aisément que l'ensemble A défini par

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{C}(T_0, ..., T_n) \mid p \text{ et } q \text{ homogènes de même degré et } q \notin \underline{a} \right\}$$

est un sous-anneau de $\mathbf{C}(T_0, ..., T_n)$ et que le quotient $A/\underline{a}A$ est un corps. On l'appelle le *corps des fonctions rationnelles sur* X et on le désigne par

$\kappa(X)$. On appelle *dimension algébrique de* X le degré de transcendance de $\kappa(X)$.

PROPOSITION 4. *Soit* X *un ensemble algébrique de* $\mathbf{P}^n$ *et soit* $\underline{a}$ *son idéal. Si* X *est irréductible et si* T_j *n'appartient pas à* $\underline{a}$, *la trace de* X *sur* U_j *est irréductible et le corps* $\kappa(X)$ *des fonctions rationnelles sur* X *s'identifie au corps des fractions de* $\mathbf{C}[T_0, ..., \hat{T}_j, ..., T_n]/\underline{a}_j$.

Désignons par p_1 et p_2 des polynômes de degré k_1 et k_2 respectivement dans $\mathbf{C}[T_0, ..., \hat{T}_j, ..., T_n]$ tels que le produit $p_1 p_2$ appartienne à $\underline{a}_j$. Ceci signifie qu'il existe un polynôme q dans $\underline{a}$ tel que

$$p_1 p_2 = q(T_0, ..., 1, ..., T_n).$$

Comme $\underline{a}$ est premier et que T_j n'appartient pas à $\underline{a}$, on peut supposer que q n'est pas divisible par T_j. On a alors

$$\begin{aligned} & T_j^{k_1+k_2} p_1\left(\frac{T_0}{T_j}, ..., \frac{T_n}{T_j}\right) p_2\left(\frac{T_0}{T_j}, ..., \frac{T_n}{T_j}\right) \\ & = T_j^{k_1+k_2} q\left(\frac{T_0}{T_j}, ..., \frac{1}{T_j}, ..., \frac{T_n}{T_j}\right) = q, \end{aligned}$$

d'où l'assertion. Le reste de la proposition est laissé en exercice au lecteur.

On appelle *courbe algébrique projective* tout ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique 1 dans un espace projectif.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des résultats correspondants du cas affine.

THÉORÈME 4. *L'ensemble des points singuliers d'une courbe algébrique projective* X *est fini. L'ensemble des points réguliers est une courbe holomorphe connexe et dense dans* X.

THÉORÈME 5. *Pour toute courbe algébrique projective* X *de* $\mathbf{P}^n$, *il existe une courbe holomorphe* $\tilde{X}$ *et une application holomorphe non constante* π *de* $\tilde{X}$ *dans* $\mathbf{P}^n$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image de π *est contenue dans* X.

(2) Pour toute courbe holomorphe connexe Y *et toute application holomorphe non constante* v *de* Y *dans* $\mathbf{P}^n$ *dont l'image est contenue dans*

X, il existe une application holomorphe $\tilde{v}$ et une seule de Y dans $\tilde{X}$ telle que

$$\pi \cdot v = \tilde{v}.$$

Le couple $(\tilde{X},\pi)$ est déterminé à isomorphisme près par ces conditions. De plus, la courbe $\tilde{X}$ est compacte et connexe et l'application π induit un isomorphisme de $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de X.

Le couple $(\tilde{X},\pi)$ du théorème 5 s'appelle la *normalisation* (ou la *désingularisation*) *de* X.