# § 5. COHOMOLOGIE DES SURFACES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Il existe pour tout indice $\iota$ une forme $u_\iota$ de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ telle que

$$u_{\kappa\iota} = u_\iota - u_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$ (§ 2, lemme 1). En particulier, puisque $u_{\kappa\iota}$ est fermée, les différentielles $du_\iota$ se recollent en une forme fermée $v$ homogène de degré 2.

Montrons que la classe de $v$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ ne dépend que de $g$. En effet, si l'on a

$$u_{\kappa\iota} = u'_\iota - u'_\kappa$$

pour certaines formes $u'_\iota$ de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, les formes $du'_\iota$ se recollent en une forme $v'$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}})$, les $u'_\iota - u_\iota$ en une forme $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ et l'on a

$$v' = v + du$$

ce qui démontre l'assertion.

La classe de $-v$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ s'appelle la *classe de Chern de* $g$ et se désigne par $\mathrm{ch}(g)$.

LEMME 3. *Pour tout recouvrement ouvert* $\mathscr{U}$ *de* $X$, *la classe de Chern induit un homomorphisme de* $\mathrm{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*)$ *dans* $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. *Si* $\mathscr{V}$ *est un recouvrement ouvert de* $X$ *plus fin que* $\mathscr{U}$, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*) \arrow[rr, "\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})"] \arrow[dr, "\mathrm{ch}"'] & & \mathrm{Pic}(\mathscr{V}, \mathbf{C}^*) \arrow[dl, "\mathrm{ch}"] \\ & \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) & \end{tikzcd}$$

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Par passage à la limite inductive, on obtient donc un homomorphisme canonique ch de $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. On appelle *classe de Chern d'un fibré en droites complexes* $\pi$ *sur* $X$ et l'on désigne par $\mathrm{ch}(\pi)$ la classe de Chern du fibré principal associé à $\pi$ (§ 2, scholie).

## § 5. COHOMOLOGIE DES SURFACES

Dans tout ce paragraphe, on désigne par $X$ une surface différentielle connexe et orientée.

Désignons par $\gamma$ une application indéfiniment dérivable définie sur un ensemble ouvert $W$ de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $X$, et par $u$ une forme différentielle de $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Il est clair que la restriction de $\gamma^*(u)$ à tout intervalle fermé de $W$ ne dépend que de la restriction de $\gamma$ à cet intervalle.

On dit qu'un chemin $c$ de $X$ défini sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ est *dérivable* s'il existe un intervalle ouvert $W$ contenant $[a, b]$ et une application $\gamma$ indéfiniment dérivable de $W$ dans $X$ prolongeant $c$. Pour toute forme différentielle $u$ de $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on désigne par $c^*(u)$ la restriction de $\gamma^*(u)$ à $[a, b]$.

On appelle *intégrale de* $u$ *sur* $c$ le nombre complexe défini par

$$\int_c u = \int_a^b c^*(u).$$

On définit ainsi une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, réelle sur les formes différentielles réelles. De plus, si $h$ est une application dérivable à dérivée positive d'un intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on a

$$\int_{c \cdot h} u = \int_c u.$$

Autrement dit l'intégrale de $u$ sur $c$ ne dépend pas de la paramétrisation de $c$. Enfin, pour toute fonction $f$ de $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{C})$, on a

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Désignons maintenant par $u$ une forme fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Le lemme de Poincaré (§ 3, proposition 1) montre qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de $X$ et, pour chaque indice $\iota$, une fonction $f_\iota$ de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid U_\iota = df_\iota$$

D'autre part, la compacité de l'intervalle $[a, b]$ montre qu'il existe une suite de nombres réels

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} = b$$

et pour tout entier $j$ compris entre 0 et $n$ un indice $\tau(j)$ tel que $U_{\tau(j)}$ contienne l'image par $c$ de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. Une telle suite est dite *subordonnée au recouvrement* $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Une telle application est dite de *subordination.*
On a alors

$$\int_c u = \sum_{0 \leqq j \leqq n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} c^*(u) = \sum_{0 \leqq j \leqq n} f_{\tau(j)}(c(t_{j+1})) - f_{\tau(j)}(c(t_j)).$$

Si $c$ est un chemin quelconque de $X$ (continu mais non nécessairement dérivable), et si $u$ est fermée, le membre de droite est toujours défini. Nous allons voir qu'il est indépendant des différents choix que nous avons faits.

Tout d'abord, il est indépendant de $\tau$: désignons par $\sigma$ une autre application de subordination de $\{0, \dots, n\}$ dans $I$. Pour tout entier $j$ compris entre 0 et $n$, l'image par $c$ de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j)} \cap U_{\sigma(j)}$, d'où l'assertion puisque la fonction $f_{\tau(j)} - f_{\sigma(j)}$ est constante sur cette composante connexe.

Pour tout nombre réel $t$ compris entre $t_j$ et $t_{j+1}$, la suite

$$a = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant t_{n+1} = b$$

est encore subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$ et la somme correspondante ne change pas. On en déduit que cette somme est indépendante de la suite subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Finalement, désignons par $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$ un deuxième recouvrement ouvert de $X$ et, pour chaque indice $\kappa$, par $g_\kappa$ une fonction de $\mathscr{C}^\infty(V_\kappa, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid_{V_\kappa} = dg_\kappa .$$

Il existe une suite

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{n+1} = b$$

subordonnée aux deux recouvrements. On désigne par $\tau$ (resp. $\sigma$) une application de subordination de $\{0, \ldots, n\}$ dans $I$ (resp. $K$). Pour tout entier $j$ compris entre 0 et $n$, l'image par $c$ de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j)} \cap V_{\sigma(j)}$ et l'on conclut en remarquant que $f_{\tau(j)} - g_{\sigma(j)}$ est constante sur cette composante connexe.

Pour tout chemin $c$ de $X$ et toute forme fermée $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on pose

$$\int_c u = \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\tau(j)}(c(t_{j+1})) - f_{\tau(j)}(c(t_j)) .$$

Cette définition coïncide avec la précédente si $c$ est dérivable. Pour toute application continue et croissante $h$ d'un intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on a

$$\int_{c \cdot h} u = \int_c u .$$

De plus, pour toute fonction $f$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$, on a

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)) ;$$

enfin, si $c'$ est un deuxième chemin de $X$ ayant pour origine l'extrémité de $c$, on a

$$\int_{cc'} u = \int_c u + \int_{c'} u .$$

LEMME 1. *Soient* $c_0$ *et* $c_1$ *deux chemins homotopes de* $X$. *On a alors*

$$\int_{c_0} u = \int_{c_1} u$$

*pour toute forme différentielle fermée* $u$ *de* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$.

On peut toujours supposer que $c_0$ et $c_1$ sont définis sur l'intervalle [0, 1] et l'on désigne par $\Gamma$ une homotopie de $c_0$ vers $c_1$, i.e. une application continue du carré

$$C = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant s \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

dans $X$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\Gamma(s,0) = c_0(s) \quad \text{et} \quad \Gamma(s,1) = c_1(s)$$
$$\Gamma(0,t) = c_0(0) = c_1(0) \quad \text{et} \quad \Gamma(1,t) = c_0(1) = c_1(1)\,.$$

Il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de $X$ et, pour chaque indice $\iota$, une fonction $f_\iota$ de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid_{U_\iota} = df_\iota\,.$$

Par compacité, il existe deux suites de nombres réels

$$0 = s_0 \leqslant \ldots \leqslant s_{n+1} = 1$$
$$0 = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_{m+1} = 1$$

et pour tout couple d'entiers $(j, k)$ un indice $\tau(j, k)$ tel que l'image par $\Gamma$ du rectangle

$$\{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid s_j \leqslant s \leqslant s_{j+1} \quad \text{et} \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}\}$$

soit contenue dans $U_{\tau(j,k)}$. Pour tout entier $k$ compris entre 0 et $m$, la restriction de $\Gamma$ à $[0, 1] \times \{t_k\}$ est un chemin $\gamma_k$ de $X$ et il suffit de montrer que l'on a

$$\int_{\gamma_k} u = \int_{\gamma_{k+1}} u\,.$$

Or, pour tout entier $j$ compris entre 1 et $n+1$, l'image par $\Gamma$ de l'ensemble

$$\{s_j\} \times [t_k, t_{k+1}]$$

est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j-1,k)} \cap U_{\tau(j,k)}$. On en déduit que

$$f_{\tau(j-1,k)}(\gamma_k(s_j)) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_j)) = f_{\tau(j-1,k)}(\gamma_{k+1}(s_j)) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_j))\,.$$

Par sommation, et en utilisant le fait que $\gamma_k$ et $\gamma_{k+1}$ ont mêmes extrémités, on voit que l'on a

$$\sum_{0 \leq j \leq n} f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_{j+1})) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_j))$$
$$= \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_{j+1})) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_j))$$

ce qui établit l'assertion.

Désignons par $\mathbf{C}^*$ le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls et par $\mathbf{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On appelle *support d'une fonction continue à valeurs dans* $\mathbf{C}^*$ (ou $\mathbf{U}$) le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est égale à 1.

On désigne par $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$) le groupe multiplicatif des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ (resp. $\mathbf{U}$) et par $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U})$) le sous-groupe formé de celles à support compact.

L'application exponentielle induit des homomorphismes

$$\exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) \quad \text{et} \quad \exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$$
$$\exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U}) .$$

On dit qu'une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ *possède un logarithme* si elle est dans l'image de l'application exponentielle.

Pour toute fonction $f$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, la forme différentielle $\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{df}{f}$ s'appelle la *différentielle logarithmique de f.* Elle est réelle si $f$ est à valeurs dans $\mathbf{U}$, à support compact si $f$ est à support compact. Puisqu'elle est fermée, on a des applications canoniques

$$\delta : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) \to \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \delta : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*) \to \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C})$$
$$\delta : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) \to \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \delta : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U}) \to \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}).$$

On vérifie aisément que ce sont des homomorphismes.

Lemme 2. *Considérons les deux diagrammes commutatifs de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \\
\cap & & \cap & & \downarrow \theta \\
\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}) \\
\cap & & \cap & & \downarrow \theta \\
\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C}) .
\end{array}$$

*Les lignes sont exactes et* $\theta$ *induit un isomorphisme sur les images de* $\delta$.

Pour toute fonction $f$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{d(\exp 2i\pi f)}{\exp 2i\pi f} = df$$

ce qui montre que le composé des deux homomorphismes est nul. D'autre part, si $g$ est une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{dg}{g} = df,$$

on voit que $g \exp(-2i\pi f)$ est constante, ce qui montre que les lignes sont exactes.

Montrons que l'application induite par $\theta$ est injective. Si $g$ est à valeurs dans $\mathbf{U}$, et si l'on a

$$\exp 2i\pi f = g,$$

on a la relation

$$\exp(-2\pi Im f) = |g| = 1$$

autrement dit $f$ est à valeurs réelles.

Montrons que l'application induite par $\theta$ est surjective. Pour toute fonction $g$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, il existe une fonction $f$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ telle que

$$|g| = \exp f.$$

On a alors

$$\frac{d(|g|^{-1}g)}{|g|^{-1}g} = \frac{dg}{g} - df$$

ce qui démontre l'assertion.

Le second diagramme se traite de la même manière.

On désigne par $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ (resp. $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$) le sous-groupe de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C})$), image de l'homomorphisme $\delta$.

Désignons par $G$ le groupe fondamental de $X$ en un point base $x_0$.

Pour toute forme différentielle fermée $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ et tout lacet $c$ de $X$, on appelle *période de $u$ sur $c$*, l'intégrale de $u$ sur $c$. Cette période ne dépend que de la classe de cohomologie de $u$ et de la classe d'homotopie de $c$ (lemme 1). On a donc un homomorphisme canonique

$$\varpi : \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$$

THÉORÈME 1. *L'homomorphisme $\varpi$ est un isomorphisme. Il envoie $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z})$.*

Montrons tout d'abord que $\varpi$ est injectif. Soit $u$ une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ et soit $c$ un chemin d'origine $x_0$ et d'extrémité $x$ dans $X$. Si toutes les périodes de $u$ sont nulles, l'intégrale

$$f(x) = \int_c u$$

ne dépend pas de $c$. Montrons que $f$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ et que sa différentielle est $u$. Tout point $x_1$ de $X$ possède un voisinage connexe $U$ sur lequel $u$ est la différentielle d'une fonction $g$ de $C^{\infty}(U, \mathbf{R})$ (lemme de Poincaré). On a alors pour tout point $x$ de $U$

$$f(x) = \int_c u + g(x) - g(x_1)$$

où $c$ est un chemin fixe joignant $x_0$ à $x_1$. Ceci démontre l'assertion.

Montrons maintenant que $\bar{\omega}$ est surjective. Désignons par $\alpha$ un homomorphisme de $G$ dans $\mathbf{R}$, par $\tilde{X}$ le revêtement universel de $X$ et par $\pi$ la projection canonique de $\tilde{X}$ dans $X$. On rappelle que le groupe $G$ s'identifie au groupe des transformations de ce revêtement; on le fait opérer sur $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ par la formule

$$c \cdot (x, t) = \big(c(x), \alpha(c) + t\big).$$

On désigne par $Y$ l'espace des orbites, par $\rho$ la projection canonique de $X \times \mathbf{R}$ dans $Y$ et par $p$ l'unique application rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{X} \times \mathbf{R} \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[d, "\rho"] \\ X & Y \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Soit $U$ un ensemble ouvert simplement connexe de $X$ et soit $V$ une composante connexe de $\pi^{-1}(U)$. Le groupe $G$ opérant trivialement sur $V \times \mathbf{R}$, on voit que $\rho$ induit un homéomorphisme de $V \times \mathbf{R}$ sur $p^{-1}(U)$. On en déduit aisément que $Y$ est séparé et que $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ est son revêtement universel. On munit $Y$ de l'unique structure différentielle faisant de $\rho$ un isomorphisme local (§ 1, exemple 4).

L'étape suivante consiste à construire une section $s$ de $p$, i.e. une application indéfiniment dérivable de $X$ dans $Y$ telle que

$$p \cdot s = 1_X \quad {}^{1)}.$$

On désigne par $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux recouvrements ouverts localement finis de $X$ tels que $U_n$ soit simplement connexe et $V_n$ relativement compact dans $U_n$ pour tout entier $n$. On construit alors par récurrence une section $s_n$ de $p$ indéfiniment dérivable au voisinage de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} \bar{V}_j$ et qui coïncide avec $s_{n-1}$ sur $\bar{V}_n \cap \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \bar{V}_j$. Ceci est possible puisque l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_n) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "p"'] & & U_n \times \mathbf{R} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_n & \end{tikzcd}$$

1) On prendra garde que $p$ n'est pas un fibré vectoriel sur $X$: les transitions sont linéaires affines et non linéaires.

L'application $s$ s'obtient par recollement des $s_n$.

Remarquons maintenant que la forme différentielle $dt$ sur $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ est invariante par $G$. Par passage au quotient, elle définit une forme différentielle fermée $u$ sur $Y$ et l'on pose

$$v = s^*(u) .$$

Pour tout lacet $c$ de $X$ au point $x_0$ et tout point $(x, t)$ de $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ se projetant sur $s(x_0)$, il existe un chemin $\tilde{c}$ et un seul relevant $s \cdot c$ et ayant $(x, t)$ pour origine. Son extrémité est par définition le point $\big(c(x), \alpha(c) + t\big)$ et l'on a

$$\int_c v = \int_c s^*(u) = \int_{s \cdot c} u = \int_{\tilde{c}} dt = \alpha(c)$$

ce qui démontre finalement la surjectivité de $\bar{\omega}$.

Il reste à voir que les formes différentielles à périodes entières sont exactement les différentielles logarithmiques.

La première partie du théorème montre qu'une fonction $f$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$ possède un logarithme sur tout ensemble ouvert simplement connexe. Puisque deux tels logarithmes diffèrent d'un entier, toutes les périodes de $\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{df}{f}$ sont des entiers.

Réciproquement, désignons par $u$ une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$. Toujours en vertu de la première partie du théorème, la forme différentielle $\pi^*(u)$ est exacte sur le revêtement universel $\tilde{X}$. Désignons par $f$ une fonction de $\mathscr{C}^\infty(\tilde{X}, \mathbf{R})$ dont la différentielle est $\pi^*(u)$. Si les périodes de $u$ sont entières, la fonction $\exp(2i\pi f)$ est $G$-invariante ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 1. *Si $X$ est simplement connexe, toute forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ est exacte et toute fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ possède un logarithme.*

Corollaire 2. *Si le groupe $G$ est de génération finie, l'injection canonique de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ induit un isomorphisme*

$$\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R} = \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \;{}^{1)} .$$

Le corollaire 2 s'applique en particulier si $X$ est compacte (appendice II, proposition 1).

[1]) On peut exprimer ce fait en disant que $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est un *réseau de* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$, i.e. un sous-groupe libre dont le rang est égal à la dimension de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$.

Soit $\phi$ une carte orientée de $X$ et soit $D$ un disque de centre $x$ relativement compact dans $\phi$. Pour toute forme différentielle fermée $u$ de $\mathscr{C}^{\infty}(X\backslash\{x\}, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, le nombre complexe

$$\mathrm{Rés}\,(u, x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} u$$

où $\partial D$ désigne le bord orienté de $D$ ne dépend que de $u$: c'est une conséquence immédiate de la formule de Stokes. On l'appelle le *résidu de* $u$ *au point* $x$.

Supposons $X$ simplement connexe. Il résulte du théorème 1 appliqué à la surface différentielle $X\backslash\{x\}$ que $u$ est exacte si et seulement si son résidu au point $x$ est nul.

On identifie désormais $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ au moyen de l'isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire $\lambda$ défini par

$$\lambda(x_1, x_2) = x_1 + ix_2 \quad \text{et} \quad \lambda^{-1}(z) = \left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \frac{1}{2i}(z-\bar{z})\right).$$

En particulier, toute carte de $X$ apparaît comme une fonction à valeurs complexes.

Lemme 3. *Soient* $\phi$ *et* $\psi$ *deux cartes orientées de* $X$ *centrées en un point* $x$, *ayant pour domaine le même ensemble simplement connexe* $U$.

*(1) La différentielle logarithmique de* $\phi$ *appartient à* $L^1_{\mathrm{loc}}(U, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. *Son résidu au point* $x$ *est égal à* 1.

*(2) Tout logarithme de* $\phi^{-1}\psi$ *demeure borné au voisinage de* $x$.

La première assertion résulte immédiatement des définitions: il suffit d'introduire des coordonnées polaires dans la carte $\phi$. Démontrons la seconde. Dans un voisinage ouvert convexe $V$ de l'origine, le changement de cartes $\gamma$ de $\phi$ dans $\psi$ s'écrit

$$\gamma_1 = u_1 x_1 + u_2 x_2 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = v_1 x_1 + v_2 x_2$$

(§ 3, lemme 2). Le jacobien de $\gamma$ à l'origine est positif. Il est donné par la formule

$$\mathrm{jac}\,(\gamma)(0) = u_1(0)v_2(0) - u_2(0)v_1(0).$$

On définit des fonctions $h_1$ et $h_2$ de $\mathscr{C}^{\infty}(V, \mathbf{C})$ en posant

$$h_1 = \frac{1}{2}(u_1+v_2) + \frac{1}{2i}(u_2-v_1) \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{2}(u_1-v_2) - \frac{1}{2i}(u_2+v_1).$$

On a alors

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = h_1 z + h_2 \bar{z} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{jac}(\gamma)(0) = |h_1(0)|^2 - |h_2(0)|^2 .$$

Il existe par conséquent deux nombres réels $\varepsilon$ et $\eta$ strictement positifs tels que

$$|h_1(z) - h_1(0)| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |h_2(z)| + 2\eta \leqslant |h_1(0)|$$

pour tout nombre complexe $z$ de module inférieur ou égal à $\varepsilon$. On en déduit que

$$\left| h_1(z) + \frac{\bar{z}}{z} h_2(z) - h_1(0) \right| \leqslant \eta + |h_2(z)| \leqslant |h_1(0)| - \eta .$$

En particulier, la fonction $z^{-1}\gamma$ qui n'est autre que l'expression de $\phi^{-1}\psi$ dans la carte $\phi$ possède un logarithme borné dans la couronne

$$\{ z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| \leqslant \varepsilon \} ,$$

ce qui démontre l'assertion.

Proposition 1. *Pour tout chemin $c$ d'origine $x$ et d'extrémité $y$ dans $X$, il existe une fonction $h$ de $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions suivantes :*

*(1) La différentielle logarithmique de $h$ appartient à $L^1_c(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$.*

*(2) La restriction de $h$ (resp. $h^{-1}$) à un voisinage convenable de $x$ (resp. $y$) est une carte orientée de $X$ centrée en $x$ (resp. $y$).*

*(3) Pour toute forme différentielle fermée $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u .$$

*Si de plus $c$ est un lacet, on peut supposer que $h$ appartient à $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$.*

Nous démontrerons tout d'abord une propriété d'additivité que nous utiliserons plusieurs fois par la suite. Supposons que l'on ait

$$c = c_1 c_2$$

et qu'il existe des fonctions $h_1$ et $h_2$ vérifiant les conditions de la proposition pour les chemins $c_1$ et $c_2$. Désignons par $a$ l'extrémité de $c_1$ (qui est aussi l'origine de $c_2$). La fonction $h_1 h_2$ possède toutes les propriétés requises, sauf qu'elle est peut être singulière au point $a$. Sur un voisinage ouvert convenable $U$ de $a$, la fonction $h_1 h_2$ possède un logarithme $f$ et ce logarithme demeure borné au voisinage de $a$ (lemme 3). Désignons par $\alpha$ une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(U, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $a$ et posons

$$h = h_1 h_2 \exp(-2i\pi\alpha f).$$

La fonction $h$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ et l'on a pour toute forme différentielle fermée $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u - \int_X d(\alpha f) \wedge u.$$

De plus, si l'on désigne par $D_\varepsilon$ le disque de centre $a$ et de rayon $\varepsilon$ dans une carte orientée de centre $a$, on a

$$\int_X d(\alpha f) \wedge u = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X \backslash D_\varepsilon} d(\alpha f) \wedge u = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} \alpha f u = 0.$$

On peut donc supposer que $X$ est un ensemble ouvert convexe de $\mathbf{C}$ et que $c$ est donné par la formule

$$c(t) = (2t-1, 0)$$

pour $t$ compris entre 0 et 1. Désignons par $X'$ le complémentaire de l'image de $c$. Il résulte du théorème 1 que la fonction $g$ définie par

$$g(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

possède un logarithme sur $X'$ et l'on pose

$$\begin{cases} h(z) = \exp\big(2i\pi\alpha(z)\log g(z)\big) & \text{si } z \in X' \\ h(z) = g(z) & \text{si } z \in X \backslash X' \end{cases}$$

en désignant par $\alpha$ une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de l'image de $c$. Vérifions la condition (3). Toute forme différentielle fermée sur $X$ est exacte (lemme de Poincaré) et l'on a pour toute fonction $f$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$,

$$\int_X \frac{dh}{h} \wedge df = \lim_{\varepsilon \to 0} - \int_{X \backslash (D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon)} d\left(f\frac{dh}{h}\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D'_\varepsilon} f\frac{dh}{h} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D''_\varepsilon} f\frac{dh}{h},$$

où $D'_\varepsilon$ (resp. $D''_\varepsilon$) désigne le disque de centre $x$ (resp. $y$) et de rayon $\varepsilon$. En passant en coordonnées polaires, on vérifie aisément que l'on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D''_\varepsilon} f \frac{dh}{h} = 2i\pi\, f(y) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D'_\varepsilon} f \frac{dh}{h} = -2i\pi\, f(x)$$

ce qui démontre la proposition.

*Remarque 1.*

On appelle *chemin joignant un point* $x$ *à l'infini dans* $X$ toute application propre et continue $c$ de $\mathbf{R}_+$ dans $X$ qui envoie l'origine sur $x$. Un tel chemin existe toujours si $X$ est ouverte (exercice pour le lecteur). On définit de manière évidente l'intégrale d'une forme fermée de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$ le long de $c$ et l'on vérifie aisément qu'il existe une fonction $h$ de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) La différentielle logarithmique de $h$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$.

(2) La restriction de $h$ à un voisinage convenable de $x$ est une carte orientée de $X$ centrée en $x$.

(3) Pour toute forme différentielle fermée $u$ de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X u \wedge \frac{dh}{h} = \int_c u\,.$$

On peut de plus supposer que le support de $h$ est contenu dans un voisinage arbitraire de l'image de $c$.

La formule de Stokes montre que la forme bilinéaire canonique

$$\Delta : \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \times \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1) \to \mathbf{R}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \textstyle\int_X u \wedge v$$

induit par restriction et passage aux quotients une forme bilinéaire canonique

$$\Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,.$$

THÉORÈME 2. *Les formes bilinéaires*

$$\Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$$

*sont non dégénérées.*

Soit $v$ une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ telle que $\Delta(\ ,v)$ soit nulle. Pour tout lacet $c$, il existe une fonction $h$ de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$\int_c v = \frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge v = 0\,.$$

En particulier, toutes les périodes de $v$ sont nulles et par conséquent $v$ est exacte (théorème 1). Ceci montre que la première forme est non dégénérée.

Soit $u$ une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1)$ telle que $\Delta(u, \;)$ soit nulle. Il résulte de ce qui précède que $u$ est la différentielle d'une fonction $f$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ et tout revient à montrer que l'on peut choisir $f$ à support compact. Soit $K$ un voisinage compact du support de $u$ dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte (appendice II, lemme 5). Il est clair que $f$ est constante sur chaque composante connexe de $X \backslash K$. Montrons qu'elle est constante sur $X \backslash K$.

Soient $U$ et $V$ les composantes connexes de deux points $x$ et $y$ de $X \backslash K$. On désigne par $\alpha$ un chemin joignant $x$ à l'infini dans $U$, par $\beta$ un chemin joignant $y$ à l'infini dans $V$ et par $c$ un chemin joignant $x$ à $y$ dans $X$. Il existe des fonctions $h_\alpha$ et $h_\beta$ dans $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x\}, \mathbf{C}^*)$ et $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{y\}, \mathbf{C}^*)$ respectivement dont le support est contenu dans le complémentaire de $K$, vérifiant les conditions de la remarque 1 pour les chemins $\alpha$ et $\beta$, et une fonction $h$ de $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1 pour le chemin $c$. Comme dans la proposition 1, on voit que l'on peut supposer la fonction $h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1}$ indéfiniment dérivable. On a alors

$$f(y) - f(x) = \int_c u = \frac{1}{2i\pi} \int_X u \wedge \frac{d(h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1})}{h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1}} = 0$$

ce qui démontre l'assertion.

Corollaire 1. *La forme bilinéaire canonique*

$$\Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

*est non dégénérée.*

Corollaire 2. *Si le groupe $G$ est de génération finie, la forme bilinéaire $\Delta$ induit des isomorphismes*

$$\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) = \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})^* \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) = \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R})^* .$$

*Remarque 2.*

Le corollaire 2 du théorème 2 s'applique en particulier si $X$ est compacte (appendice II, proposition 1). On voit alors que l'espace vectoriel $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ est de dimension paire puisque la forme bilinéaire $\Delta$ est non dégénérée et alternée.

L'ensemble $G'$ défini par

$$G' = \{ c \in G \mid \textstyle\int_c u = 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \}$$

est un sous-groupe contenant le groupe des commutateurs. Le quotient $\tilde{G}$ est donc un groupe abélien dont on vérifie aisément qu'il est sans torsion. Il résulte par ailleurs du théorème 1 que $\bar{\omega}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathrm{Hom}(\tilde{G}, \mathbf{Z})$.

Tout lacet $c$ de $X$ possède une image naturelle dans $\tilde{G}$, à savoir la classe du lacet $\alpha c \alpha^{-1}$ où $\alpha$ est un chemin joignant $x_0$ à un point de l'image de $c$. En particulier, toute courbe compacte orientée de $X$ possède une image naturelle dans $\tilde{G}$ (appendice IV, théorème 1). D'autre part, si $h$ désigne une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1 pour le lacet $c$, la classe dans $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})$ de la différentielle logarithmique de $h$ ne dépend que de la classe de $c$ dans $\tilde{G}$. C'est une conséquence immédiate des définitions et du théorème 2. On a donc un homomorphisme canonique

$$\theta : \tilde{G} \to \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z}) .$$

THÉORÈME 3. *L'homomorphisme $\theta$ est un isomorphisme.*

L'injectivité de $\theta$ résulte immédiatement des définitions.

Soit $h$ une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{U})$. Pour toute valeur régulière $z$ de $h$ différente de 1, l'ensemble $h^{-1}(z)$ est une courbe compacte de $X$. C'est donc une réunion finie de courbes isomorphes à $\mathbf{U}$. Nous allons munir cette courbe d'une orientation naturelle. Désignons par $f$ l'unique isomorphisme de $\mathbf{U} \backslash \{1\}$ sur $]0, 1[$ tel que

$$\exp(2i\pi f) = 1_{\mathbf{U} \backslash \{1\}}$$

et par $t$ l'image de $z$ par cet isomorphisme. L'ensemble $(f \cdot h)^{-1}(]0, t])$ est une pièce de la surface différentielle $(f \cdot h)^{-1}(]0, 1[)$ dont le bord est précisément $h^{-1}(z)$. On munit ce bord de l'orientation induite.

Soient $t'$ et $t''$ deux valeurs régulières de $f \cdot h$ avec $t'$ strictement inférieur à $t''$. L'ensemble

$$Y(t', t'') = (f \cdot h)^{-1}([t', t''])$$

est une pièce compacte de $X$ et l'on a pour toute forme différentielle fermée $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$,

$$\int_{(f \cdot h)^{-1}(t'')} u - \int_{(f \cdot h)^{-1}(t')} u = \int_{Y(t', t'')} du = 0 .$$

En particulier, la classe $c$ de $h^{-1}(z)$ dans $\tilde{G}$ est indépendante de la valeur régulière $z$. D'autre part, sur l'ensemble ouvert $h^{-1}(\mathbf{U} \backslash \{1\})$, on a la relation

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dh}{h} = d(f \cdot h) .$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{Y(t',t'')}\frac{dh}{h}\wedge u = t''\int_{(f\cdot h)^{-1}(t'')} u - t'\int_{(f\cdot h)^{-1}(t')} u\,.$$

Le théorème de Sard (§ 1, théorème 2) montre qu'il existe des valeurs régulières de $f \cdot h$ arbitrairement voisines de 0 et de 1. On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_X \frac{dh}{h}\wedge u = \lim_{\substack{t'\to 0\\ t''\to 1}} \frac{1}{2i\pi}\int_{Y(t',t'')}\frac{dh}{h}\wedge u = \int_c u\,.$$

Autrement dit, l'image de $c$ par l'application $\theta$ n'est autre que la classe de $h$ dans $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$, ce qui démontre le théorème.

*Remarque 3.*

Si $u$ et $v$ sont des éléments de $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$ et $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ respectivement, on a

$$\int_X u \wedge v = \int_c v$$

où $c$ désigne l'unique élément de $\tilde{G}$ défini par $u$. Ceci montre en particulier que $\Delta$ induit une forme $\mathbf{Z}$-bilinéaire rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{H}^1_c(X,\mathbf{Z}) & \times & \mathbf{H}^1(X,\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\ \Delta\ } & \mathbf{Z} \\
{\scriptstyle\theta}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\omega}} & & \| \\
\tilde{G} & \times & \mathrm{Hom}(\tilde{G},\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\ <\,,\,>\ } & \mathbf{Z}
\end{array}$$

commutatif. La forme bilinéaire $< \, , \, >$ étant non dégénérée par définition de $\tilde{G}$, il en est de même de $\Delta$ et l'on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})^*$. Si de plus $\tilde{G}$ est de type fini, on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})^*$.

La forme $\mathbf{Z}$-bilinéaire $\Delta$ s'appelle la *forme d'intersection de* $X$. Nous allons essayer d'expliquer pourquoi.

Soient $g$ et $h$ deux fonctions de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$ respectivement et soit $u$ l'application produit $(g, h)$ de $X$ dans $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$.

L'application de $g^{-1}(\mathbf{U}\backslash\{1\})$ dans $(\mathbf{U}\backslash\{1\}) \times \mathbf{U}$ induite par $u$ est propre. On désigne par $\nu$ son degré (§ 4, théorème 4). Notons que l'on a

$$\frac{-1}{4\pi^2}\int_X \frac{dg}{g}\wedge\frac{dh}{h} = \frac{-\nu}{4\pi^2}\int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}}\frac{dz}{z}\wedge\frac{dw}{w} = \nu\,.$$

Désignons par $(z, w)$ une valeur régulière de $u$, avec $z$ et $w$ distincts de 1, par $f$ l'unique isomorphisme de $\mathbf{U} \backslash \{1\}$ sur $]0, 1[$ tel que

$$\exp(2i\pi f) = 1_{\mathbf{U}\backslash\{1\}}$$

et par $(s_0, t_0)$ l'image de $(z, w)$ par $f \times f$.

Les ensembles $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$ sont deux courbes de $X$ naturellement orientées (démonstration du théorème 3), dont la première est compacte. Soit $x$ un point de l'intersection de ces deux courbes. La restriction de $(f \times f) \cdot u$ à un voisinage convenable de $x$ est une carte de $X$ et l'image de $g^{-1}(z)$ (resp. $h^{-1}(w)$) par cette carte est la courbe

$$\{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s = s_0\} \quad (\text{resp. } \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid t = t_0\}).$$

Si la carte est orientée, on dit que le *nombre d'intersection de* $g^{-1}(z)$ *et* $h^{-1}(w)$ *au point* $x$ *est* 1 (quand on se promène le long de $g^{-1}(z)$, la courbe $h^{-1}(w)$ vient de la droite). Si la carte n'est pas orientée, on dit que le *nombre d'intersection de* $g^{-1}(z)$ *et* $h^{-1}(w)$ *au point* $x$ *est* $-1$ (quand on se promène le long de $g^{-1}(z)$, la courbe $h^{-1}(w)$ vient de la gauche). Ainsi le degré $v$ apparaît comme le nombre de points d'intersection (avec signes) des deux courbes orientées $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$.

Nous allons maintenant calculer la classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur $X$. On peut se limiter au cas où $X$ est compacte: si $X$ est ouverte, les deux groupes Pic $(X, \mathbf{C}^*)$ et $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ sont nuls (§ 2, corollaire du théorème 1 et § 4, théorème 3). On sait alors que l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}$ (§ 4, théorème 3). La classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur $X$ apparaît donc comme un nombre complexe.

Soit $\pi$ un fibré en droites complexes sur $X$ et soit $x$ un point de $X$.

Désignons par $\Phi$ et $\Psi$ des cartes de $\pi$ ayant pour domaine le même voisinage de $x$ et par $g$ la transition de $\Phi$ dans $\Psi$. Pour toute section $s$ de $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x\}, \pi)$, on a

$$s_\Psi = g\, s_\Phi .$$

En particulier, si $s$ ne s'annule pas, le résidu au point $x$ de la différentielle logarithmique de $s_\Phi$ est indépendant de $\Phi$. C'est un entier que l'on appelle *l'ordre de* $s$ *au point* $x$ et que l'on désigne par $0_x(s)$.

Soit $A$ un ensemble fini de $X$ et soit $s$ une section partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X \backslash A, \pi)$. On appelle *ordre de* $s$ l'entier défini par

$$0(s) = \sum_{x \in A} 0_x(s).$$

PROPOSITION 2. *On suppose $X$ compacte et l'on désigne par $A$ un ensemble fini de $X$. Pour toute section $s$ partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash A, \pi)$, on a*

$$0(s) = \mathrm{ch}(\pi).$$

Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de $A$. Il existe deux familles $(U_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $(V_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'ensembles ouverts de $X$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) L'ensemble $U_j$ est le domaine d'une carte $\Phi_j$ de $\pi$ et le domaine d'une carte orientée $\psi_j$ de $X$ centrée au point $x_j$.

(2) L'ensemble $V_j$ est un disque relativement compact de centre $x_j$ dans $\psi_j$.

(3) Les ensembles $U_1, \ldots, U_n$ sont deux à deux disjoints.

Puisque la section $s$ est partout non nulle sur $X\backslash A$, le fibré $\pi$ est trivial sur l'ensemble

$$V_0 = X\backslash \bigcup_{1 \leq j \leq n} \bar{V}_j .$$

Choisissons une trivialisation $\Phi_0$ et désignons par $g_{kj}$ la transition de $\Phi_j$ dans $\Phi_k$ pour tout couple d'entiers $(j, k)$ compris entre 0 et $n$. On a

$$s_k = g_{kj} s_j$$

où $s_j$ désigne l'expression de $s$ dans $\Phi_j$. Choisissons pour tout entier $j$ compris entre 1 et $n$ une fonction $\alpha_j$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $X\backslash V_j$ et à 0 au voisinage de $x_j$. Les formes différentielles $\alpha_j \dfrac{ds_j}{s_j}$ appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(U_j, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ et l'on a

$$\frac{1}{2i\pi}\alpha_k \frac{ds_k}{s_k} - \frac{1}{2i\pi}\alpha_j \frac{ds_j}{s_j} = \frac{1}{2i\pi}\frac{dg_{kj}}{g_{kj}}$$

en tout point de $V_j \cap V_k$. Par définition de la classe de Chern, on a donc

$$\mathrm{ch}(\pi) = \textstyle\int_X u$$

où $u$ désigne la forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}})$ obtenue par recollement des $\dfrac{1}{2i\pi} d\alpha_j \wedge \dfrac{ds_j}{s_j}$. Par conséquent,

$$\mathrm{ch}(\pi) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{U_j} d\alpha_j \wedge \frac{ds_j}{s_j} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V_j} \frac{ds_j}{s_j} = 0(s)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *La classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur* $X$ *est un entier.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et de l'existence de sections transverses (§ 2, lemme 5).

LEMME 4. *Soient* $\pi$ *et* $\rho$ *deux fibrés en droites complexes sur* $X$ *et soient* $s$ *et* $t$ *deux sections transverses de* $\pi$ *et* $\rho$ *respectivement.*

*(1) L'ordre de* $s$ *en un de ses zéros est égal à* $1$ *ou* $-1$.

*(2) Si l'ordre de* $s$ *est égal à l'ordre de* $t$ *en tout point, alors* $\pi$ *et* $\rho$ *sont isomorphes.*

La première assertion résulte immédiatement des définitions. La démonstration de la seconde est laissée en exercice au lecteur (on procèdera comme dans la proposition 1 pour construire une section partout non nulle de $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi \otimes \rho^{*})$).

Soit $\phi$ une carte orientée de $X$ centrée en un point $x$. On désigne par $U_0$ son domaine et par $U_1$ l'ensemble $X \setminus \{x\}$. On définit un cocycle complexe de rang 1 subordonné au recouvrement $(U_0, U_1)$ en posant

$$g_{1,0} = \phi^{-1} \quad \text{et} \quad g_{0,1} = \phi .$$

Désignons par $\pi$ un fibré en droites complexes associé à ce cocycle. La fonction $\phi$ sur $U_0$ et la fonction constante 1 sur $U_1$ se recollent en une section transverse $s$ de $\pi$ et l'on a

$$\mathrm{ch}(\pi) = 0(s) = 0_x(s) = 1 .$$

Le lemme 4 montre que la classe $\xi_x$ de $\pi$ dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de $x$.

LEMME 5. *Le groupe* $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ *est engendré par les fibrés de la forme* $\xi_x$.

Soit $\xi$ un fibré principal de groupe structural $\mathbf{C}^*$ sur $X$ et soit $\pi$ un fibré en droites complexes associé à $\xi$. On désigne par $s$ une section transverse de $\pi$, par $x_1, \ldots, x_n$ les zéros d'ordre 1 de $s$ et par $y_1, \ldots, y_m$ les zéros d'ordre $-1$ de $s$. On voit aisément à l'aide du lemme 4 que l'on a

$$\xi = \xi_{x_1} \cdots \xi_{x_n} \bar{\xi}_{y_1} \cdots \bar{\xi}_{y_m}$$

ce qui démontre l'assertion (§ 2, lemme 4).

THÉORÈME 4. *Si* $X$ *est compacte, la classe de Chern induit un isomorphisme canonique de* $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ *sur* $\mathbf{Z}$.

En vertu de ce qui précède, il suffit de montrer que ch est injective, ou ce qui revient au même, que tout fibré principal de la forme

$$\xi = \xi_x \xi_y^{-1}$$

est trivial. Désignons par $\pi$ (resp. $\rho$) un fibré en droites complexes associé à $\xi_x$ (resp. $\xi_y$) et par $s$ (resp. $t$) une section transverse de $\pi$ (resp. $\rho$) possédant un seul zéro d'ordre 1 au point $x$ (resp. $y$). Soit $c$ un chemin joignant $x$ à $y$ dans $X$ et soit $h$ une fonction de $\mathscr{C}^\infty$ $(X \setminus \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1. La section $h \frac{t}{s}$ de $\mathscr{C}^\infty$ $(X \setminus \{x, y\}, \pi \otimes \rho^*)$ est partout non nulle. Elle est d'ordre 0 au point $x$ et au point $y$. L'assertion résulte alors du lemme 4.