

Appendice: Calcul des nombres de classes des ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$H_3(D_1, D_2) = \frac{\Phi_3(D_1, D_2)}{12} + \frac{11 E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + 15 E_{D_1, D_2}^{(2)}(2) + 8 E_{D_1, D_2}^{(2)}(3)}{24} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(\varepsilon)}(1)}{2}$$

$$H_5(D_1, D_2) = \frac{\Phi_5(D_1, D_2)}{30} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(2)}(1)}{4} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(3)}(1)}{3} + \frac{2 E_{D_1, D_2}^{(5)}(1)}{5}.$$

APPENDICE:

CALCUL DES NOMBRES DE CLASSES DES ORDRES D'EICHLER
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Nous avons calculé sur ordinateur les nombres H_{D_1, D_2} , T_{D_1, D_2} , H_{D_1, D_2}^+ pour les ordres d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) sur le corps des nombres rationnels. Nous avons utilisé les résultats théoriques du chapitre 1.

D_1 désigne un produit d'un nombre impair de nombres premiers sans facteur carré,

D_2 désigne un produit de nombres premier sans facteur carré tel que $(D_1, D_2) = 1$.

s est le nombre de diviseurs premiers de $D_1 D_2$.

$h(-m)$ est le nombre de classes du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $d(-m)$ est son discriminant:

$$d(-m) = \begin{cases} -m & \text{si } m \equiv -1(4) \\ -4m & \text{si } m \not\equiv -1(4). \end{cases}$$

$E_{D_1, D_2}^{(m)} = \prod_{p|D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{p|D_2} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole $E_{D_1, D_2}(O)$ correspondant à l'ordre maximal O de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

$F_{D_1, D_2}^{(m)} = 2 \prod_{p|D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{\substack{p|D_2 \\ p \neq 2}} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole

correspondant à l'ordre de conducteur 2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ si D_2 est pair et $m \equiv 3(8)$.

On pose

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv -1(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 7(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m \equiv 3(8) \text{ et } m \neq 3, \end{cases}$$

$$\kappa(m) = \begin{cases} \lambda(m) & \text{si } m \not\equiv 3(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 3 & \text{si } m \equiv 3(8) \text{ et } m \neq 3. \end{cases}$$

On calcule facilement les nombres $p(m)$ pour $m \mid D_1 D_2$. On a

$$p(1) = \frac{1}{12} \left[\prod_{p \mid D_1} (p-1) \prod_{p \mid D_2} (p+1) + 3 E_{D_1, D_2}^{(1)} + 4 E_{D_1, D_2}^{(3)} \right],$$

$$2 p(m) = \begin{cases} E_{D_1, D_2}^{(m)} h(-m) & \text{si } D_1 \text{ est pair} \\ E_{D_1, D_2}^{(m)} h(-m) \lambda(m) & \text{si } D_1 D_2 \text{ est impair} \\ F_{D_1, D_2}^{(m)} h(-m) \kappa(m) & \text{si } D_2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

Nous obtenons les nombres H_{D_1, D_2} , T_{D_1, D_2} , $H^+_{D_1, D_2}$ en utilisant les formules (12) qui s'écrivent :

$$H_{D_1, D_2} = p(1)$$

$$2^s T_{D_1, D_2} = \sum_{m \mid D_1 D_2} p(m)$$

$$2^s H^+_{D_1, D_2} = \sum_{m \mid D_1 D_2} (p(m))^2$$

Les tables de Pizer [9] donnent H_{D_1, D_2} et T_{D_1, D_2} pour $D_1 D_2 \leq 210$. Elles contiennent quelques erreurs

D_1	D_2		
5	23	$H = 8$	au lieu de 10
7	26	$T = 5$	au lieu de 6
17	10	$T = 5$	au lieu de 6
19	10	$T = 6$	au lieu de 7
3	70	$T = 3$	au lieu de 4

Si $k = \mathbf{Q}(\sqrt{10})$, $D_1 = 1$, $D_2 = 7$ on trouve $H_{1,7} = 64$ au lieu de 61 et $T_{1,7} = 18$ au lieu de 30. Si on calcule $H^+_{1,7}$ on a $H^+_{1,7} = 1040$.

Nous possédons les nombres de classes des idéaux à gauche H_{D_1, D_2} , le nombre de type d'ordres T_{D_1, D_2} et le nombre de classes des idéaux quasi-normaux $H^+_{D_1, D_2}$ pour les invariants (D_1, D_2) , $D_1 < 47$ et $D_2 \leq 101$, $47 \leq D_1 \leq 101$ et $D_2 \leq 31$.

Mes remerciements chaleureux vont à H. COHEN qui a programmé ces opérations sur l'ordinateur du centre de calcul de Bordeaux.

Nous avons extrait des tables obtenues les ordres d'Eichler pour lesquels les nombres H_{D_1, D_2} , T_{D_1, D_2} , $H^+_{D_1, D_2}$ sont égaux à 1.

1. Ordres tels que $H_{D_1, D_2}^+ = 1$

Il y en a 10 (à isomorphisme près)

D_1	D_2
2	1
	3
	5
	11
3	1
	2

D_1	D_2
5	1
	2
7	1
13	1

2. Ordres tels que $H_{D_1, D_2} = 1$

Ce sont les mêmes

3. Ordres tels que $T_{D_1, D_2} = 1$

Il faut rajouter les 10 invariants suivants:

D_1	D_2
2	7
	15
	23
3	5
	11

D_1	D_2
7	3
30	1
42	1
70	1
78	1

Pour tous ces ordres, nous avons $H_{D_1, D_2} = H_{D_1, D_2}^+ = 1$.

Pour les autres ordres, les relations suivantes sont toujours vérifiées:

$$1 < T_{D_1, D_2} < H_{D_1, D_2} \leq H_{D_1, D_2}^+ \leq T_{D_1, D_2} H_{D_1, D_2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BROWN, K. S. Euler characteristics of discrete groups and G-spaces. *Invent. Math.* (à paraître).
- [2] DEDEKIND, K. Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlicher Körpers. *Gesammelte mathematische werke I.*
- [3] DEURING, M. *Algebren.* Springer Verlag.
- [4] EICHLER, M. Zur Zahlentheorie der Quaternionen algebren. *J. reine angew. math.* 195 (1955), pp. 127-151.