Introduction

Introduction

On obtient dans cet article la partie fractionnaire de la valeur $\zeta_k(-1)$ au point -1 de la fonction zêta d'un corps de nombres totalement réel k, en la déduisant de la formule du nombre de classes des idéaux à gauche d'un ordre d'Eichler, donnée par Eichler en 1954. On étudie ensuite en détail le cas particulier des corps quadratiques réels.

Dans le premier chapitre, on développe l'arithmétique des corps de quaternions totalement définis dont la théorie est due à M. Eichler. Il est nécessaire pour lire ce chapitre de connaître une partie de la théorie des algèbres centrales simples sur des corps de nombres; le meilleur livre de référence est celui de Deuring [2]. Nous étudions les ordres d'Eichler et leurs idéaux localement libres; nous reférons principalement à Eichler [4] et à Pizer [9]. Notre but est de calculer le nombre H de classes des idéaux à gauche d'un ordre d'Eichler [4], le nombre T de types des ordres d'Eichler [9] et le nombre H^+ de classes des idéaux quasi-normaux [10]. Pour cela, nous avons introduits des nombres $p(n)$ analogues aux traces des matrices de Brandt.

Nous remercions chaleureusement H. Cohen qui a calculé sur ordinateur ces nombres pour les ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels, d'invariant (D_1, D_2) avec $D_1 < 47$, $D_2 \leqslant 101$ et $47 \leqslant D_1 \leqslant 101$, $D_2 \leqslant 31$.

Le nombre de classes h_k du corps k divise $2H$. Dans le chapitre 2 nous exprimons cette divisibilité par une congruence entre la valeur $\zeta_k(-1)$ au point -1 de la fonction zêta de k et les nombres de classes relatifs de certaines extensions quadratiques de k. Nous déterminons ainsi la partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$.

Soit ξ_p une racine d'ordre p de l'unité (sauf si $p = 2$ où $\xi_2 = e^{i\pi/2}$); on note $h'_p = h_{k(\xi_p)}/h_k$, w_p l'indice des unités de k dans celles de $k(\xi_p)$ et s_p le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \mid p$ inertes dans $k(\xi_p)$. Si $[k(\xi_p) : k] > 2$ ou s'il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \mid p$ de k décomposé dans $k(\xi_p)$, la valeur au point -1 de la fonction zêta d'un corps de nombres totalement réel k est entière en p. Sinon la p-partie fractionnaire de $2^{2-n}\zeta_k(-1)$ est celle de

$$\frac{h'_p 2^{s_p}}{w_p \prod_{\mathfrak{p}\mid p} (1 - N\mathfrak{p})}$$

S'il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \mid 2$ de k décomposé dans $k(\xi_2)$ alors $\zeta_k(-1)/2^{n-3}$ est entier en 2, sinons sa partie fractionnaire est celle de

$$\frac{h'_2 \, 2^{2^s+1}}{w_2 \prod_{\mathfrak{p} \mid 2} (1 - N\mathfrak{p})}$$

Ce résultat est analogue à ceux de Brown [1] et de Greenberg [5] qui viennent de paraître. Si k est le sous-corps réel maximal du p^m-ème corps cyclotomique, l'exposant de p dans $\zeta_k(-1)$ est égal à $-m$ pour les nombres premiers p réguliers impairs. Si $p = 2$, l'exposant de 2 dans $\zeta_k(-1)$ est $2^{m-2} - m - 1$ et pour $m \geqslant 5$ le nombre de classes relatif de $\mathbf{Q}(\xi_{2^m}, \xi_3)$ est divisible par 3.

Enfin, dans le chapitre 3, nous reprenons les travaux des chapitres précédents, en les améliorant, lorsque k est un corps quadratique.

Si k est un corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ on note $\zeta_m(.)$ sa fonction zêta et $h(m)$ son nombre de classes. Le nombre de classes $H_m(D_1, D_2)$ d'un ordre d'Eichler $\mathfrak{O}$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ d'invariant (D_1, D_2) est

$$H(m) = h(m) \frac{\zeta_m(-1)}{2} \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} (1 - N\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} (1 + N\mathfrak{p}) + a(m) \frac{h(-m)}{8}$$
$$+ b(m) \frac{h(-3m)}{12} + c(m) \frac{h(n)\,h(n')}{4}$$

où $a(m)$, $b(m)$, $c(m)$ sont des entiers bien définis. Si $c(m) \neq 0$, l'unité fondamentale ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est de norme 1 et $n = 2 - \mathrm{Tr}\,\varepsilon$ (modulo les carrés), $nn' = m$ ou $4m$.

L'expression suivante est un entier :

$$\frac{\zeta_m(-1)}{2} + \alpha(m) \frac{h(-m)}{8} + \beta(m) \frac{h(-3m)}{6} + \gamma(m) \frac{h(n)\,h(n')}{4}$$

où $\alpha(m)$, $\beta(m)$, $\gamma(m)$ sont des entiers bien définis. Elle représente, si $m = p$ est un nombre premier, la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ calculée par Hirzebruch.

Je remercie vivement J. Martinet pour les conseils qu'il m'a donnés et l'intérêt avec lequel il a suivi ce travail.