3. DÉMONSTRATION DE LA NON DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION F

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

formule qui donne (1) en prenant $x = m$.

En posant $\lambda = \dfrac{\log x}{\log q}$, on a

$$\sum_{n \leqq x} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[\lambda]} \left(\sum_{n \leqq x} a_r(n) \right).$$

On déduit de (6) que l'on a

$$\sum_{n \leqq x} a_r(n) = \int_0^x \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt + (1 + [x] - x)\, a_r([x]),$$

$$= q^{r+1}\, g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2}\, x + (1 + [x] - x)\, a_r([x]),$$

d'où

$$\sum_{n \leqq x} S_q(n) =$$

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1}\, g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2}\, x(1 + [\lambda]) + (1 + [x] - x)\, S_q([x]),$$

puis on vérifie que

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1}\, g(q^{-r-1}x) = q^{1+[\lambda]} \sum_{k=0}^{[\lambda]} q^{-k}\, g(q^k \cdot q^{\lambda - [\lambda] - 1})$$

$$= x\, q^{1+[\lambda]-\lambda}\, h(q^{\lambda-[\lambda]-1}) - h(x).$$

3. Démonstration de la non dérivabilité de la fonction F

Nous allons maintenant montrer que la fonction F n'est dérivable en aucun point. En raison de la périodicité, il suffit de montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et qu'elle n'est pas dérivable à gauche au point 1.

3.1. On voit que ceci se ramène à montrer que la fonction h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $\left]\dfrac{1}{q}, 1\right[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.

En effet, si $\dfrac{1}{q} \leqslant t < 1$, on a $0 \leqslant 1 + \dfrac{\log t}{\log q} < 1$ et (4) donne

$$F\left(1+\frac{\log t}{\log q}\right) = -\frac{q-1}{2}\cdot\frac{\log t}{\log q} + \frac{1}{t}h(t).$$

Ceci vaut encore pour $t = 1$ car $F(1) = h(1) = 0$.

Ainsi on a pour $\frac{1}{q} \leqslant t \leqslant 1$

$$h(t) = tF\left(1+\frac{\log t}{\log q}\right) + \frac{q-1}{2\log q}\, t \log t.$$

Par suite, si F était dérivable au point θ de $]0, 1[$, h serait dérivable au point $q^{\theta-1}$ de $\left]\frac{1}{q}, 1\right[$. Si F était dérivable à gauche en 1, h serait dérivable à gauche en 1.

En fait, nous montrerons que h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.[8])

3.2. Nous utiliserons la remarque suivante:

Si $x = \frac{a}{q^k}$, où $a \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$h(x) = \sum_{r=0}^{k-1} q^{-r} g(q^r x)$$

puisque, dès que $r \geqslant k$, $q^r x$ est un entier et $g(q^r x) = 0$.

Par suite, si $x = \frac{a}{q^k}$ et $x' = \frac{b}{q^k}$, avec a et $b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\frac{h(x') - h(x)}{x' - x} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x') - g(q^r x)}{q^r x' - q^r x}.$$

3.3. Il est très facile de montrer que la fonction h n'est pas dérivable à gauche au point 1.

Cela résulte immédiatement de ce que, si $\xi_k = 1 - q^{-k}$, la suite $\left\{\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k}\right\}$ tend vers $+\infty$.

---

[8]) La fonction h n'est donc dérivable en aucun point. Dans le cas où $q = 2$, $-h$ est la fonction f de Trollope. Celui-ci indique que cette fonction f n'est dérivable en aucun point.

En effet, d'après la remarque précédente,

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r) - g(q^r \xi_k)}{q^r - q^r \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} q^{k-r} \left(g(q^r) - g(q^r \xi_k)\right).$$

Mais, comme $q^r \xi_k = q^r - q^{r-k}$, d'après la périodicité de g on a pour chaque $r \leqslant k - 1$

$$g(q^r) - g(q^r \xi_k) = g(1) - g(1 - q^{r-k}) = \int_{1-q^{r-k}}^{1} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt,$$

ce qui est égal à $q^{r-k} \frac{q-1}{2}$ car, pour $1 - q^{r-k} \leqslant t < 1$, $[t] = 0$ et $[qt] = q - 1$ puisque $q - 1 \leqslant q - q^{r-k+1} \leqslant qt < q$. On voit donc que

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = k \frac{q-1}{2}.$$

3.3. Soit maintenant θ un nombre de l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Nous allons montrer que h n'est pas dérivable en θ.

Nous nous baserons sur l'observation suivante:

Si h était dérivable en θ, quelles que soient les suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendant vers θ, avec $x_k \leqslant \theta < x'_k$ pour chaque k, la suite $\left\{\frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}\right\}$ tendrait vers $h'(\theta)$.[9])

3.3.1. Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q^{-j},$$

où les α_j sont des entiers satisfaisant à $0 \leqslant \alpha_j \leqslant q - 1$ et il y a une infinité de j pour lesquels $\alpha_j \neq q - 1$ (l'écriture du nombre θ en base q étant $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_j \ldots$).

---

[9]) Il existerait une fonction ε continue en θ et nulle en ce point telle que l'on ait pour tout t

$$h(t) = h(\theta) + (t-\theta) h'(\theta) + (t-\theta) \varepsilon(t),$$

et l'on aurait

$$\frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} = h'(\theta) + \frac{(x'_k - \theta) \varepsilon(x'_k) + (\theta - x_k) \varepsilon(x_k)}{x'_k - x_k},$$

d'où

$$\left| \frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} - h'(\theta) \right| \leqslant \mathrm{Sup}\left(|\varepsilon(x_k)|, |\varepsilon(x'_k)|\right).$$

Nous introduirons une suite d'entiers $N_0, N_1, \ldots, N_\nu, \ldots$ définie par

$$N_0 = 0 \text{ et, pour } \nu \geqslant 1,\ N_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j\, q^{\nu-j}.$$

Ceci dit, définissons x_k et x'_k pour $k \geqslant 1$ par

$$x_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, q^{-j} \quad \text{et} \quad x'_k = x_k + q^{-k},$$

et posons $\rho_k = \dfrac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}$.

Les deux suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendent vers θ et on a pour tout $k \geqslant 1$

$$x_k \leqslant \theta < x'_k .$$

Par suite, si h était dérivable au point θ, la suite $\{\rho_k\}$ tendrait vers $h'(\theta)$.

On a $x_k = N_k\, q^{-k}$ et $x'_k = (N_k+1)\, q^{-k}$.

Donc, d'après la remarque du paragraphe 3.2., on a pour tout $k \geqslant 1$

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x'_k) - g(q^r x_k)}{q^r x'_k - q^r x_k}.$$

D'après la formule (2), on a pour chaque $r \leqslant k-1$

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = \int_{q^r x_k}^{q^r x'_k} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt .$$

On va voir que, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x'_k$, on a

$$[qt] - q[t] = \alpha_{r+1} .$$

On voit d'abord que, pour $0 \leqslant \nu \leqslant k$, on a

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + 1 - q^{\nu-k},$$

d'où il résulte que

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k < q^\nu x'_k \leqslant N_\nu + 1 . \tag{9}$$

C'est vrai pour $\nu = 0$ car $0 \leqslant x_k \leqslant (q-1) \sum_{j=1}^{k} q^{-j} = 1 - q^{-k}$.

Si $k \geqslant 2$, pour $1 \leqslant \nu \leqslant k-1$ on a

$$q^\nu x_k = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j\, q^{\nu-j} = N_\nu + \sum_{j=\nu+1}^{k} \alpha_j\, q^{\nu-j},$$

d'où

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + (q-1) \sum_{j=\nu+1}^{k} q^{\nu-j} = N_\nu + 1 - q^{\nu-k}.$$

Enfin $q^k x_k = N_k$.

Il résulte de (9) que, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x'_k$, avec $0 \leqslant r \leqslant k-1$, on a

$$N_r \leqslant t < N_r + 1 \quad \text{et} \quad N_{r+1} \leqslant qt < N_{r+1} + 1,$$

et par suite

$$[t] = N_r \quad \text{et} \quad [qt] = N_{r+1},$$

d'où

$$[qt] - q[t] = N_{r+1} - q N_r,$$

qui est bien égal à α_{r+1}.

Ceci montre que, pour $0 \leqslant r \leqslant k-1$,

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = (q^r x'_k - q^r x_k)\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right),$$

et on voit ainsi que

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1}\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right) = \sum_{r=1}^{k}\left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right).$$

La fonction h n'est donc certainement pas dérivable au point θ si la série

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) \tag{10}$$

n'est pas convergente.

C'est certainement le cas si q est pair car alors on a pour tout r

$$\left|\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

puisque $2\left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right) = 2\alpha_r - q + 1$ est un entier impair.

Par contre, dans le cas où q est impair, la série (10), dont tous les termes sont des entiers, peut être convergente. Cela se produit si, et seulement si, ces termes sont tous nuls à partir d'un certain rang, c'est à dire si l'on a $\alpha_j = \dfrac{q-1}{2}$ à partir d'une certaine valeur de j.

Il faut donc traiter séparément ce cas.

3.3.2. Supposons donc maintenant que q est impair et que l'on a $\alpha_j = \dfrac{q-1}{2}$ pour $j > m$, avec $m \geqslant 1$.

Alors, d'après ce que l'on vient de voir, la suite $\{\rho_k\}$ tend vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right)$. Donc, si h était dérivable au point θ, on devrait avoir

$$h'(\theta) = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right).$$

Nous allons introduire une nouvelle suite $\{x''_k\}$ définie par

$$x''_k = x_k + 2q^{-k}$$

et poser

$$\rho'_k = \frac{h(x''_k) - h(x_k)}{x''_k - x_k}.$$

En utilisant encore la remarque du paragraphe 3.2., on voit que

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x''_k) - g(q^r x_k)}{q^r x''_k - q^r x_k}.$$

Si h était dérivable au point θ, la suite $\{\rho'_k\}$ devrait tendre vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right)$. On va montrer qu'il n'en est pas ainsi.

On voit d'abord que, si $k > m$, on a pour $0 \leqslant v \leqslant k-1$

$$N_v \leqslant q^v x_k \leqslant N_v + 1 - 2q^{v-k},$$

d'où il résulte que

$$N_v \leqslant q^v x_k < q^v x''_k \leqslant N_v + 1. \tag{11}$$

En effet, on peut d'abord écrire

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q^{-j} + \sum_{j=m+1}^{k} \alpha_j q^{-j},$$

d'où

$$0 \leqslant x_k \leqslant (q-1) \sum_{j=1}^{m} q^{-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^{k} q^{-j} = 1 - \frac{1}{2}(q^{-m} + q^{-k}).$$

Mais $q^{-m} + q^{-k} = (q^{k-m}+1)\, q^{-k} \geqslant 4q^{-k}$ puisque $q \geqslant 3$ et $k - m \geqslant 1$.

Pour $1 \leqslant v \leqslant k-1$, on a, comme on l'a déjà vu,

$$q^v x_k = N_v + \sum_{j=v+1}^{k} \alpha_j q^{v-j}.$$

Ceci donne toujours $q^v x_k \geqslant N_v$.
D'autre part, si $v < m$, on peut écrire

$$q^v x_k = N_v + \sum_{j=v+1}^{m} \alpha_j q^{v-j} + \sum_{j=m+1}^{k} \alpha_j q^{v-j}$$

et on voit ainsi que

$$q^v x_k \leqslant N_v + (q-1) \sum_{j=v+1}^{m} q^{v-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^{k} q^{v-j}$$

$$= N_v + 1 - \frac{1}{2}(q^{v-m} + q^{v-k}),$$

d'où

$$q^v x_k \leqslant N_v + 1 - 2\,q^{v-k},$$

puisque

$$q^{v-m} + q^{v-k} = (q^{k-m}+1)\,q^{v-k} \geqq 4\,q^{v-k}.$$

Si $v \geqslant m$, on a simplement

$$q^v x_k = N_v + \frac{q-1}{2} \sum_{j=v+1}^{k} q^{v-j} = N_v + 1 - \frac{1}{2}(1+q^{v-k})$$

et

$$1 + q^{v-k} = (q^{k-v}+1)\,q^{v-k} \geqq 4\,q^{v-k}.$$

Il résulte de (11) que, si $k > m$, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x''_k$ avec $0 \leqslant r \leqslant k-2$, on a $[t] = N_r$ et $[qt] = N_{r+1}$, d'où $[qt] - q\,[t] = \alpha_{r+1}$.

Donc, si $k > m$, on a pour $0 \leqslant r \leqslant k-2$

$$g(q^r x''_k) - g(q^r x_k) = (q^r x''_k - q^r x_k)\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right),$$

et par suite

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-2}\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k)}{q^{k-1}x''_k - q^{k-1}x_k}$$

$$= \sum_{r=1}^{m}\left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{q}{2}\left(g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k)\right).$$

Notons maintenant que l'on a

$$q^{k-1}x_k = N_{k-1} + \alpha_k q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q-1}{2q}$$

et

$$q^{k-1}\,x''_k = q^{k-1}\,x_k + 2\,q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q+3}{2q},$$

et par suite, d'après la périodicité de g,

$$g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k) = g\left(\frac{q+3}{2q}\right) - g\left(\frac{q-1}{2q}\right)$$

$$= \int_{\frac{q-1}{2q}}^{\frac{q+3}{2q}} \left([qt] - q\,[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt\,.$$

Mais on a $[t] = 0$ pour $\dfrac{q-1}{2q} \leqslant t < \dfrac{q+3}{2q}$

et

$$[qt] = \frac{q-1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q-1}{2q} \leqslant t < \frac{q+1}{2q},$$

$$[qt] = \frac{q+1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q+1}{2q} \leqslant t < \frac{q+3}{2q}.$$

Par suite

$$g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k) = \frac{1}{q}.$$

Finalement, on voit que, pour $k > m$,

$$\rho'_k = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

La suite $\{\rho'_k\}$ ne tend donc pas vers $\displaystyle\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right)$.

4. Détermination de la série de Fourier de F

Si l'on écrit la série de Fourier de F sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k\, e^{2k\pi i x},$$

on a

$$c_k = \int_0^1 F(x)\, e^{-2k\pi i x}\, dx\,.$$