

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »
Autor: Delange, Hubert
Kapitel: 3. DÉMONSTRATION DE LA NON DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION F
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-47328>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

formule qui donne (1) en prenant $x = m$.

En posant $\lambda = \frac{\log x}{\log q}$, on a

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[\lambda]} \left(\sum_{n \leq x} a_r(n) \right).$$

On déduit de (6) que l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_r(n) &= \int_0^x \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt + (1 + [x] - x) a_r([x]), \\ &= q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x + (1 + [x] - x) a_r([x]), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} S_q(n) &= \\ &\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x (1 + [\lambda]) + (1 + [x] - x) S_q([x]), \end{aligned}$$

puis on vérifie que

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) &= q^{1+[\lambda]} \sum_{k=0}^{[\lambda]} q^{-k} g(q^k \cdot q^{\lambda-[\lambda]-1}) \\ &= x q^{1+[\lambda]-\lambda} h(q^{\lambda-[\lambda]-1}) - h(x). \end{aligned}$$

3. DÉMONSTRATION DE LA NON DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION F

Nous allons maintenant montrer que la fonction F n'est dérivable en aucun point. En raison de la périodicité, il suffit de montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et qu'elle n'est pas dérivable à gauche au point 1.

3.1. On voit que ceci se ramène à montrer que la fonction h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $\left] \frac{1}{q}, 1 \right[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.

En effet, si $\frac{1}{q} \leq t < 1$, on a $0 \leq 1 + \frac{\log t}{\log q} < 1$ et (4) donne

$$F\left(1 + \frac{\log t}{\log q}\right) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{\log t}{\log q} + \frac{1}{t} h(t).$$

Ceci vaut encore pour $t = 1$ car $F(1) = h(1) = 0$.

Ainsi on a pour $\frac{1}{q} \leq t \leq 1$

$$h(t) = tF\left(1 + \frac{\log t}{\log q}\right) + \frac{q-1}{2 \log q} t \log t.$$

Par suite, si F était dérivable au point θ de $]0, 1[$, h serait dérivable au point $q^{\theta-1}$ de $\left]\frac{1}{q}, 1\right[$. Si F était dérivable à gauche en 1, h serait dérivable à gauche en 1.

En fait, nous montrerons que h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.⁸⁾

3.2. Nous utiliserons la remarque suivante:

Si $x = \frac{a}{q^k}$, où $a \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$h(x) = \sum_{r=0}^{k-1} q^{-r} g(q^r x)$$

puisque, dès que $r \geq k$, $q^r x$ est un entier et $g(q^r x) = 0$.

Par suite, si $x = \frac{a}{q^k}$ et $x' = \frac{b}{q^k}$, avec a et $b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$ et $k \in \mathbf{N}^*$,

on a

$$\frac{h(x') - h(x)}{x' - x} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x') - g(q^r x)}{q^r x' - q^r x}.$$

3.3. Il est très facile de montrer que la fonction h n'est pas dérivable à gauche au point 1.

Cela résulte immédiatement de ce que, si $\xi_k = 1 - q^{-k}$, la suite $\left\{ \frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} \right\}$ tend vers $+\infty$.

⁸⁾ La fonction h n'est donc dérivable en aucun point. Dans le cas où $q = 2$, $-h$ est la fonction f de Trollope. Celui-ci indique que cette fonction f n'est dérivable en aucun point.

En effet, d'après la remarque précédente,

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r) - g(q^r \xi_k)}{q^r - q^r \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} q^{k-r} (g(q^r) - g(q^r \xi_k)).$$

Mais, comme $q^r \xi_k = q^r - q^{r-k}$, d'après la périodicité de g on a pour chaque $r \leq k-1$

$$g(q^r) - g(q^r \xi_k) = g(1) - g(1 - q^{r-k}) = \int_{1-q^{r-k}}^1 \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt,$$

ce qui est égal à $q^{r-k} \frac{q-1}{2}$ car, pour $1 - q^{r-k} \leq t < 1$, $[t] = 0$ et $[qt] = q-1$ puisque $q-1 \leq q - q^{r-k+1} \leq qt < q$. On voit donc que

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = k \frac{q-1}{2}.$$

3.3. Soit maintenant θ un nombre de l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Nous allons montrer que h n'est pas dérivable en θ .

Nous nous baserons sur l'observation suivante:

Si h était dérivable en θ , quelles que soient les suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendant vers θ , avec $x_k \leq \theta < x'_k$ pour chaque k , la suite $\left\{ \frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} \right\}$ tendrait vers $h'(\theta)$.⁹⁾

3.3.1. Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q^{-j},$$

où les α_j sont des entiers satisfaisant à $0 \leq \alpha_j \leq q-1$ et il y a une infinité de j pour lesquels $\alpha_j \neq q-1$ (l'écriture du nombre θ en base q étant $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \dots$).

⁹⁾ Il existerait une fonction ε continue en θ et nulle en ce point telle que l'on ait pour tout t

$$h(t) = h(\theta) + (t-\theta) h'(\theta) + (t-\theta) \varepsilon(t),$$

et l'on aurait

$$\frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} = h'(\theta) + \frac{(x'_k - \theta) \varepsilon(x'_k) + (\theta - x_k) \varepsilon(x_k)}{x'_k - x_k},$$

d'où

$$\left| \frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} - h'(\theta) \right| \leq \text{Sup}(|\varepsilon(x_k)|, |\varepsilon(x'_k)|).$$

Nous introduirons une suite d'entiers $N_0, N_1, \dots, N_v, \dots$ définie par

$$N_0 = 0 \text{ et, pour } v \geq 1, N_v = \sum_{j=1}^v \alpha_j q^{v-j}.$$

Ceci dit, définissons x_k et x'_k pour $k \geq 1$ par

$$x_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j q^{-j} \quad \text{et} \quad x'_k = x_k + q^{-k},$$

et posons
$$\rho_k = \frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}.$$

Les deux suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendent vers θ et on a pour tout $k \geq 1$

$$x_k \leq \theta < x'_k.$$

Par suite, si h était dérivable au point θ , la suite $\{\rho_k\}$ tendrait vers $h'(\theta)$.

On a $x_k = N_k q^{-k}$ et $x'_k = (N_k + 1) q^{-k}$.

Donc, d'après la remarque du paragraphe 3.2., on a pour tout $k \geq 1$

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x'_k) - g(q^r x_k)}{q^r x'_k - q^r x_k}.$$

D'après la formule (2), on a pour chaque $r \leq k-1$

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = \int_{q^r x_k}^{q^r x'_k} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt.$$

On va voir que, pour $q^r x_k \leq t < q^r x'_k$, on a

$$[qt] - q[t] = \alpha_{r+1}.$$

On voit d'abord que, pour $0 \leq v \leq k$, on a

$$N_v \leq q^v x_k \leq N_v + 1 - q^{v-k},$$

d'où il résulte que

$$(9) \quad N_v \leq q^v x_k < q^v x'_k \leq N_v + 1.$$

C'est vrai pour $v = 0$ car $0 \leq x_k \leq (q-1) \sum_{j=1}^k q^{-j} = 1 - q^{-k}$.

Si $k \geq 2$, pour $1 \leq v \leq k-1$ on a

$$q^v x_k = \sum_{j=1}^v \alpha_j q^{v-j} = N_v + \sum_{j=v+1}^k \alpha_j q^{v-j},$$

d'où

$$N_v \leq q^v x_k \leq N_v + (q-1) \sum_{j=v+1}^k q^{v-j} = N_v + 1 - q^{v-k}.$$

Enfin $q^k x_k = N_k$.

Il résulte de (9) que, pour $q^r x_k \leq t < q^r x'_k$, avec $0 \leq r \leq k-1$, on a

$$N_r \leq t < N_r + 1 \quad \text{et} \quad N_{r+1} \leq qt < N_{r+1} + 1,$$

et par suite

$$[t] = N_r \quad \text{et} \quad [qt] = N_{r+1},$$

d'où

$$[qt] - q[t] = N_{r+1} - qN_r,$$

qui est bien égal à α_{r+1} .

Ceci montre que, pour $0 \leq r \leq k-1$,

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = (q^r x'_k - q^r x_k) \left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2} \right),$$

et on voit ainsi que

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1} \left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2} \right) = \sum_{r=1}^k \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right).$$

La fonction h n'est donc certainement pas dérivable au point θ si la série

$$(10) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right)$$

n'est pas convergente.

C'est certainement le cas si q est pair car alors on a pour tout r

$$\left| \alpha_r - \frac{q-1}{2} \right| \geq \frac{1}{2}$$

puisque $2 \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right) = 2\alpha_r - q + 1$ est un entier impair.

Par contre, dans le cas où q est impair, la série (10), dont tous les termes sont des entiers, peut être convergente. Cela se produit si, et seulement si, ces termes sont tous nuls à partir d'un certain rang, c'est à dire si l'on a

$$\alpha_j = \frac{q-1}{2} \quad \text{à partir d'une certaine valeur de } j.$$

Il faut donc traiter séparément ce cas.

3.3.2. Supposons donc maintenant que q est impair et que l'on a $\alpha_j = \frac{q-1}{2}$ pour $j > m$, avec $m \geq 1$.

Alors, d'après ce que l'on vient de voir, la suite $\{\rho_k\}$ tend vers $\sum_{r=1}^m \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right)$. Donc, si h était dérivable au point θ , on devrait avoir

$$h'(\theta) = \sum_{r=1}^m \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right).$$

Nous allons introduire une nouvelle suite $\{x''_k\}$ définie par

$$x''_k = x_k + 2q^{-k}$$

et poser

$$\rho'_k = \frac{h(x''_k) - h(x_k)}{x''_k - x_k}.$$

En utilisant encore la remarque du paragraphe 3.2., on voit que

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x''_k) - g(q^r x_k)}{q^r x''_k - q^r x_k}.$$

Si h était dérivable au point θ , la suite $\{\rho'_k\}$ devrait tendre vers $\sum_{r=1}^m \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right)$. On va montrer qu'il n'en est pas ainsi.

On voit d'abord que, si $k > m$, on a pour $0 \leq v \leq k-1$

$$N_v \leq q^v x_k \leq N_v + 1 - 2q^{v-k},$$

d'où il résulte que

$$(11) \quad N_v \leq q^v x_k < q^v x''_k \leq N_v + 1.$$

En effet, on peut d'abord écrire

$$x_k = \sum_{j=1}^m \alpha_j q^{-j} + \sum_{j=m+1}^k \alpha_j q^{-j},$$

d'où

$$0 \leq x_k \leq (q-1) \sum_{j=1}^m q^{-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^k q^{-j} = 1 - \frac{1}{2}(q^{-m} + q^{-k}).$$

Mais $q^{-m} + q^{-k} = (q^{k-m} + 1)q^{-k} \geq 4q^{-k}$ puisque $q \geq 3$ et $k-m \geq 1$.

Pour $1 \leq v \leq k-1$, on a, comme on l'a déjà vu,

$$q^v x_k = N_v + \sum_{j=v+1}^k \alpha_j q^{v-j}.$$

Ceci donne toujours $q^v x_k \geq N_v$.

D'autre part, si $v < m$, on peut écrire

$$q^v x_k = N_v + \sum_{j=v+1}^m \alpha_j q^{v-j} + \sum_{j=m+1}^k \alpha_j q^{v-j}$$

et on voit ainsi que

$$\begin{aligned} q^v x_k &\leq N_v + (q-1) \sum_{j=v+1}^m q^{v-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^k q^{v-j} \\ &= N_v + 1 - \frac{1}{2}(q^{v-m} + q^{v-k}), \end{aligned}$$

d'où

$$q^v x_k \leq N_v + 1 - 2q^{v-k},$$

puisque

$$q^{v-m} + q^{v-k} = (q^{k-m} + 1) q^{v-k} \geq 4q^{v-k}.$$

Si $v \geq m$, on a simplement

$$q^v x_k = N_v + \frac{q-1}{2} \sum_{j=v+1}^k q^{v-j} = N_v + 1 - \frac{1}{2}(1 + q^{v-k})$$

et

$$1 + q^{v-k} = (q^{k-v} + 1) q^{v-k} \geq 4q^{v-k}.$$

Il résulte de (11) que, si $k > m$, pour $q^r x_k \leq t < q^r x''_k$ avec $0 \leq r \leq k-2$, on a $[t] = N_r$ et $[qt] = N_{r+1}$, d'où $[qt] - q[t] = \alpha_{r+1}$.

Donc, si $k > m$, on a pour $0 \leq r \leq k-2$

$$g(q^r x''_k) - g(q^r x_k) = (q^r x''_k - q^r x_k) \left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2} \right),$$

et par suite

$$\begin{aligned} \rho'_k &= \sum_{r=0}^{k-2} \left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2} \right) + \frac{g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k)}{q^{k-1} x''_k - q^{k-1} x_k} \\ &= \sum_{r=1}^m \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right) + \frac{q}{2} (g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k)). \end{aligned}$$

Notons maintenant que l'on a

$$q^{k-1} x_k = N_{k-1} + \alpha_k q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q-1}{2q}$$

et

$$q^{k-1} x''_k = q^{k-1} x_k + 2q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q+3}{2q},$$

et par suite, d'après la périodicité de g ,

$$\begin{aligned} g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k) &= g\left(\frac{q+3}{2q}\right) - g\left(\frac{q-1}{2q}\right) \\ &= \int_{\frac{q-1}{2q}}^{\frac{q+3}{2q}} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Mais on a $[t] = 0$ pour $\frac{q-1}{2q} \leq t < \frac{q+3}{2q}$

et

$$\begin{aligned} [qt] &= \frac{q-1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q-1}{2q} \leq t < \frac{q+1}{2q}, \\ [qt] &= \frac{q+1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q+1}{2q} \leq t < \frac{q+3}{2q}. \end{aligned}$$

Par suite

$$g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k) = \frac{1}{q}.$$

Finalement, on voit que, pour $k > m$,

$$\rho'_k = \sum_{r=1}^m \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right) + \frac{1}{2}.$$

La suite $\{\rho'_k\}$ ne tend donc pas vers $\sum_{r=1}^m \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right)$.

4. DÉTERMINATION DE LA SÉRIE DE FOURIER DE F

Si l'on écrit la série de Fourier de F sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2k\pi i x},$$

on a

$$c_k = \int_0^1 F(x) e^{-2k\pi i x} dx.$$