1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »

par Hubert DELANGE

1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, q est un entier fixe > 1. On désigue par $S_q(n)$ la somme des chiffres de l'entier positif ou nul n écrit en base q.

Un certain nombre d'auteurs ont étudié le comportement de l'expression

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) .$$

Bush[1]) avait montré tout d'abord que l'on a quand x tend vers l'infini

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) \sim \frac{q-1}{2 \log q} x \log x .$$

Bellman et Shapiro [2]) ont obtenu

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + O(x \log\log x) .$$

Mirsky [3]) a remplacé le $O(x \log\log x)$ par $O(x)$, puis Drazin et Griffith [4]) ont fait une étude plus précise du terme d'erreur.

Enfin Trollope[5]) a établi le résultat suivant pour le cas où $q = 2$:

n étant un entier satisfaisant à $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, avec $m \geqslant 0$, posons $n = 2^m(1+x)$, de sorte que $0 \leqslant x < 1$.

Alors on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_2(k) = \frac{n \log n}{2 \log 2} - 2^{m-1}\left(2f(x) + (1+x)\frac{\log(1+x)}{\log 2} - 2x\right),$$

---

[1]) An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers, *Amer. Math. Monthly*, 47 (1940), pp. 154-156.

[2]) A problem in additive number theory, *Ann. of Math.* (2), 49 (1948), pp. 333-340.

[3]) A theorem on representations of integers in the scale of r, *Scripta Math.*, 15 (1949), pp. 11-12.

[4]) On the decimal representation of integers, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (4), 48 (1952), pp. 555-565.

[5]) An explicit expression for binary digital sums, *Math. Mag.*, 41 (1968), pp. 21-25.

où $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} g(2^r x)$,

g étant la fonction périodique de période 1 déterminée par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1-x}{2} \text{ pour } \frac{1}{2} < x < 1 . \end{cases}$$

La démonstration de Trollope est assez compliquée. De plus, il dit que son résultat peut se généraliser pour q quelconque, mais que les calculs sont beaucoup plus compliqués.

Nous nous proposons ici de montrer qu'un calcul extrêmement simple conduit à un énoncé général qui est équivalent pour $q = 2$ à celui de Trollope, mais dont la formulation nous paraît plus élégante.

On a le théorème suivant:

THÉOREME. *Il existe une fonction F continue sur* **R** *et périodique de période* 1, *telle que, pour tout entier* $m \geqslant 1$,

$$(1) \qquad \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} \log m + F\left(\frac{\log m}{\log q}\right). \text{ [6]}$$

On peut définir F de la façon suivante :

On définit d'abord une fonction g sur **R** *par la formule*

$$(2) \qquad g(x) = \int_0^x \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt .$$

Cette fonction est évidemment continue sur **R** et elle est périodique de période 1 du fait que la fonction $t \mapsto [qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}$ est périodique de période 1 et que son intégrale sur l'intervalle [0, 1] est nulle. Elle est donc bornée et la série $\sum_{r=0}^{\infty} q^{-r} g(q^r x)$ est uniformément convergente sur **R**.

Ainsi *la fonction h définie sur* **R** *par*

$$(3) \qquad h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q^{-r} g(q^r x)$$

---

[6]) Il est clair que la fonction F est unique car cette formule détermine ses valeurs aux points $\frac{\log m}{\log q} - \left[\frac{\log m}{\log q}\right]$, dont l'ensemble est partout dense sur [0,1].

est continue sur **R** (et aussi périodique de période 1, mais cette propriété ne nous sert pas).

Finalement on pose

$$(4) \qquad F(x) = \frac{q-1}{2}(1+[x]-x) + q^{1+[x]-x}\, h(q^{x-[x]-1}) .$$

Il est clair que la fonction F définie par cette formule est périodique de période 1, continue pour x non entier, et continue à droite pour x entier. On vérifie immédiatement qu'en fait elle est aussi continue pour x entier: on a $F(1) = \frac{q-1}{2} + q\, h\left(\frac{1}{q}\right)$, ce qui est égal à 0 car, comme $g(x) = 0$ pour x entier, la formule (3) donne $h\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}$; or on voit que, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $F(x)$ tend vers $h(1) = 0$.

Nous compléterons notre résultat en montrant que la fonction F n'est dérivable en aucun point et déterminant explicitement sa série de Fourier. Celle-ci est absolument convergente et ses coefficients s'expriment à l'aide des valeurs de la fonction ζ de Riemann aux points $\frac{2k\pi i}{\log q}$, où $k \in \mathbf{Z}^*$.[7])

2. Démonstration de la formule (1)

Soient $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$, ... les chiffres de l'entier positif ou nul n écrit en base q, lus de droite à gauche. En fait il y a seulement un nombre fini de chiffres, mais on peut former une suite infinie en complétant par des zéros.

Ainsi on a
$$n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)\, q^r ,$$
avec $0 \leqslant a_r(n) < q$ pour tout $r \geqslant 0$ et $a_r(n) = 0$ pour $r > \frac{\log n}{\log q}$.

On a aussi $S_q(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)$.

[7]) La possibilité de déterminer explicitement la série de Fourier de F nous a été signalée par M. Mauclaire. Il l'obtenait à partir du résultat suivant, qu'il avait établi antérieurement:

On a pour $\operatorname{Re} s > 0$: $s \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{s+1}} S_q([t])\, dt = \frac{q^s - q}{q^s - 1} \zeta(s)$.

Nous donnerons ici un calcul direct.