

# AN IMMERSION OF $\mathbb{T}^n - \mathbb{D}^n$ INTO $\mathbb{R}^n$

Autor(en): **Ferry, Steven**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-46901>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# AN IMMERSION OF $T^n - D^n$ INTO $R^n$

by Steven FERRY

Let  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  be the  $n$ -torus and let  $D^n \subset T^n$  be an embedded disc. Kirby, Siebenmann, and Edwards use immersions of  $T^n - D^n$  into  $R^n$  repeatedly in their work on stable homeomorphisms and triangulations. Although the existence of such immersions follows trivially from the work of Smale and Hirsch, it is appealing to have a more elementary construction. We will provide an explicit formula. Less explicit constructions have been given by D. Barden and J. Milnor.

Elements of  $T^n$  will be written as  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  with  $\theta_1 \in S^1$ .  $\theta_1$  will also be thought of as a real number  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Occasionally  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  will be denoted by  $\theta$ .

LEMMA 1. Let  $(\theta, t) \rightarrow (f_1(\theta, t), \dots, f_{n+1}(\theta, t))$  be an embedding of  $T^n \times (-1, 1)$  into  $R^{n+1}$  such that  $f_{n+1}(\theta, t) > 0$ . The map of  $T^{n+1} \times (-1, 1)$  into  $R^{n+2}$  defined by

$$(\theta, t) \rightarrow (f_1(\theta, t), \dots, f_n(\theta, t), f_{n+1}(\theta, t) \cos \theta_{n+1}, f_{n+1}(\theta, t) \sin \theta_{n+1})$$

is an embedding.

We define the *standard embedding* of  $T^n \times (-1, 1)$  into  $R^{n+1}$  to be the embedding obtained by starting with  $(\theta_1, t) \rightarrow ((1+t) \cos \theta_1, (1+t) \sin \theta_1 + 2)$  and iterating the process described in lemma 1. At each stage we must add  $2^n$  to the last term so that the condition  $f_{n+1}(\theta, t) > 0$  will be satisfied. For example, in the standard embedding of  $T^3 \times (1, 1) \rightarrow R^4$  we have

$$f_3(\theta, t) = (((1+t) \sin \theta_1 + 2) \sin \theta_2 + 4) \cos \theta_3$$

and

$$f_4(\theta, t) = (((1+t) \sin \theta_1 + 2) \sin \theta_2 + 4) \sin \theta_3 + 8.$$

Let  $S = \{ \theta \in T^n \mid \theta_i = 0 \text{ for some } i, 1 \leq i \leq n \}$ .

Let  $\varphi: T^n \rightarrow R^1$  be defined by

$$\varphi(\theta) = \frac{\sin \theta_1 \dots \sin \theta_n}{2^n} + \frac{\sin \theta_2 \dots \sin \theta_n}{2^{n-1}} + \dots + \frac{\sin \theta_n}{2}$$

*Theorem 1.* Let  $(\theta, t) \rightarrow (f_1(\theta, t), \dots, f_{n+1}(\theta, t))$  be the standard embedding of  $T^n \times (-1, 1)$  into  $R^{n+1}$ . For some  $\varepsilon > 0$  the map  $\theta \rightarrow$

$\rightarrow (f_1(\theta, \varepsilon\varphi(\theta)), \dots, f_n(\theta, \varepsilon\varphi(\theta)))$  has nonsingular Jacobian on  $S$ . It therefore immerses a regular neighborhood of  $S$  (i.e.  $T^n - D^n$ ) into  $R^n$ .

*Proof.* Using elementary properties of determinants, we compute:

$$\begin{aligned} & \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} + \varepsilon \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \right) \Bigg|_{\substack{\theta \in S \\ t = \varepsilon\varphi}} = \det \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} + \varepsilon \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} & 0 \\ \hline \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} & 1 \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{\theta \in S \\ t = \varepsilon\varphi}} \\ &= \det \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} & -\varepsilon \frac{\partial f_i}{\partial t} \\ \hline \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} & 1 \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{\theta \in S \\ t = \varepsilon\varphi}} = \det \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} & -\varepsilon \frac{\partial f_i}{\partial t} \\ \hline \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} & 0 \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{\theta \in S \\ t = \varepsilon\varphi}} + \det \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} & -\varepsilon \frac{\partial f_i}{\partial t} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{\theta \in S \\ t = \varepsilon\varphi}} \end{aligned}$$

By construction,  $f_i$  involves only  $\theta_1, \dots, \theta_i$  and  $\frac{\partial f_i}{\partial \theta_i}$  has a factor of  $\sin \theta_i$ .

Thus, on  $S$  the upper left hand corner of the second matrix is triangular with at least one zero on the diagonal. We have

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} + \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \right) \Bigg|_{\substack{\theta \in S \\ t = \varepsilon\varphi}} = -\varepsilon \det \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} & \frac{\partial f_i}{\partial t} \\ \hline \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} & 0 \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{\theta \in S \\ t = \varepsilon\varphi}}$$

Notice that  $f_{n+1}(\theta, 0) = 2^n \varphi(\theta)$  and that  $\frac{\partial f_{n+1}}{\partial t}$  is identically zero

on  $S$ . Thus, if the above determinant is evaluated at  $\theta \in S, t = 0$  it is  $\left(\frac{-\varepsilon}{2^n}\right)$  times the determinant of the Jacobian of the standard embedding. It is therefore nonsingular when evaluated at  $\theta \in S, t = \varepsilon\varphi$  for sufficiently small  $\varepsilon$ . This completes the proof.

In essence, we have perturbed the image of  $T^n \times 0$  in  $R^{n+1}$  along its normal bundle so that projection into  $R^n$  is an immersion on  $S$ . More precise calculations show that  $\varepsilon$  may be taken to be 1.

Steven Ferry

Department of Mathematics  
University of Kentucky  
Lexington, KY. 40506

(Reçu le 25 septembre 1973)