§10. — Applications

le cas D_2, d'après la remarque précédente, r est entier, donc le procédé donné en D_2 diminue $i(D)$.

Le lemme (C, i) et donc aussi le lemme fondamental, est ainsi complètement établi.

Remarque. Au lieu de faire une récurrence sur l'irrégularité $i(D)$, il aurait été tout aussi naturel (et même encore plus) d'utiliser a priori « l'irrégularité de Katz », i.e. le nombre r qui vient d'être introduit et qui mesure l'ordre minimum des pôles à considérer (voir à ce sujet Gérard-Levelt [1], et un article à paraître de Levelt).

§ 10. — Applications

A. Le théorème 7.1 entraîne le théorème suivant, en apparence plus général:

Théorème 10.1. Soit Φ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ des $2m+1$ variables x, $Y = (y_1, ..., y_m)$, et $Z = (z_1, ..., z_m)$ au voisinage de $0, Y^0, Z^0$, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; supposons qu'il existe une série formelle $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$ (à coefficients réels) vérifiant $H(0) = Y^0$, $\dfrac{dH}{dx}(0) = Z^0$, et $\hat{\Phi}(x, H, \dfrac{dH}{dx}) = 0$; supposons enfin que la matrice $\dfrac{\partial\hat{\Phi}}{\partial Z}(x, H(x), \dfrac{dH}{dx})$ soit inversible sur $\hat{K}$ (i.e. appartienne à Gl $(m, \hat{K})$); *alors, il existe $F \in \mathscr{E}^m$, à valeurs réelles vérifiant $\hat{F} = H, \Phi(x, H, \dfrac{dH}{dx}) = 0$.*

La réduction de ce résultat au cas (7.1) se fait suivant une méthode habituelle dans des questions voisines.

a) On traite d'abord le cas où l'on a $\Phi(x, Y, Z) = \Psi(x, Y) Z - \chi(x, Y)$, Ψ une matrice d'ordre m à coefficients $\mathscr{C}^\infty$; pour cela, on se ramène au cas où $H = 0$, donc $Y^0 = Z^0 = 0$; on a alors la situation suivante: $\chi(x, 0)$ est plat, et $\Psi(x, 0)$ est inversible dans $K\mathscr{E}$; il existe donc $M \in$ End $(\mathscr{E}^m)$ et $k \in \mathbf{N}$ tel qu'on ait $M\Psi(x, 0) = x^k I$; posons alors $F = x^k G$; on a $M\Psi(x, x^k G) = x^k \Psi_1(x, G)$, avec $\Psi_1(x, 0) = I$, donc $\Psi_1(x, Y)$ inversible au voisinage de $(0, 0)$ dans les matrices à coefficients $\mathscr{C}^\infty$; on a aussi $M\chi(x, x^k G) = x^k \chi_1(x, G)$, avec χ_1 de classe $\mathscr{C}^\infty$; on est alors ramené à l'équation

$$x^k \frac{dG}{dx} = -k x^{k-1} G + \Psi_1^{-1}(x, G)\chi_1(x, G)$$

b) On ramène le cas général au précédent, par dérivation, en remplaçant l'équation initiale par le système

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} - G = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(x, F, G) + \dfrac{\partial \Psi}{\partial Y}(x, F, G)\, G + \dfrac{\partial \Psi}{\partial Z}(x, F, G)\, \dfrac{dG}{dx} = 0 \end{cases}$$

B. Dans le cas linéaire, on a le théorème suivant

Théorème 10.2. Soit $D = x^k \dfrac{dF}{dx} - M F$, *avec* $k \in \mathbf{N}$, $M \in \mathrm{End}\,(\mathscr{E}^m)$; *soit* $\mathscr{D}'$ *l'espace des germes de distributions en* 0 *dans* $\mathbf{R}$; *alors, on a* $D\,\mathscr{D}' = \mathscr{D}'$

Soit $a > 0$, assez petit, et soit I l'intervalle $[-a, a]$; par dualité, il suffit de démontrer que l'application $D' : \mathscr{D}_I^m \to \mathscr{D}_I^m$ est d'image fermée ($\mathscr{D}_I$ désignant l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans I); d'après un lemme classique puisque $\mathscr{D}_I$ est un espace de Fréchet, il suffit de démontrer que $D'\,\mathscr{D}_I^m$ est de codimension finie dans $\mathscr{D}_I^m$; soit E l'espace des $F \in \mathscr{C}^\infty\,(I)^m$ telles qu'on ait $D' F \subset \mathscr{D}_I^m$; d'après le théorème d'existence et d'unicité usuel, $\mathscr{D}_I^m$ est le sous-espace de E formé des F telles qu'on ait $F(-a) = F(a) = 0$, donc $\mathscr{D}_I^m$ est de codimension finie dans E, et il suffit de démontrer que $D' E$ est de codimension finie dans $\mathscr{D}_I$; or, le théorème 7.1, joint au théorème usuel de prolongement des solutions d'une équation différentielle montre que $D' E$ est l'ensemble des $F \in \mathscr{D}_I^m$ tels qu'on ait $\hat{F} \in \hat{D}'\,\hat{\mathscr{O}}^m$; ceci joint au fait que $D' : \hat{\mathscr{O}}^m \to \hat{\mathscr{O}}^m$ est à indice (proposition 3.6) et à la surjectivité de l'application $\hat{\ }: \mathscr{D}_I \to \hat{\mathscr{O}}$, entraîne le résultat cherché.

C. Le théorème 7.1 a été démontré indépendamment par Kouznetsov [1] qui en a donné une intéressante application à l'étude des « formes normales » des systèmes différentiels. Disons qu'un système $D = x \dfrac{d}{dx} - M$, $M \in \mathrm{End}\,(K\,\mathscr{E}^m)$ est « élémentaire » si l'on a $M = \sum_{-k}^{-1} \lambda_p x^p I + M_0$, avec $M_0 \in \mathrm{End}\,(\mathbf{C}^m)$ et $\lambda_p \in \mathbf{C}$; on a alors le résultat suivant:

Théorème 10.3 — (Kouznetsov). Soit $D = x \dfrac{d}{dx} - M$, $M \in \mathrm{End}\,(K\mathscr{E}^m)$ *un système différentiel. Par un changement de variables* $x = y^q$ *(q entier* $\geqslant 0$*) suivi d'une transformation* $F = A\,F_1$, $A \in \mathrm{Gl}\,(m, K\mathscr{E})$, *on peut réduire D à la forme « diagonale »*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$$

les D_j *étant élémentaires.*

Indiquons rapidement comment ce résultat peut se démontrer; tout d'abord, le théorème 7.1 permet de se réduire à démontrer le résultat analogue dans le cas formel, c'est-à-dire dans le cas où l'on remplace dans l'énoncé précédent $\mathscr{E}$ par $\hat{\mathcal{O}}$, et $K\mathscr{E}$ par $\hat{K}$. Dans ce dernier cas, le résultat dû à Turrittin, peut se démontrer par les mêmes arguments que ceux employés au § 9; d'ailleurs, ici, les choses se simplifient; il suffit d'une double récurrence sur m d'une part, $i\,(D)$ (ou mieux encore, l'irrégularité de Katz) d'autre part; nous n'entrerons pas dans les détails.

Soit enfin Δ un secteur angulaire fermé de sommet 0 dans $\mathbf{C}$, de mesuer angulaire $\mu\,(\Delta)$; désignons par $\mathscr{A}\,(\Delta)$ l'espace des germes en 0 de fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur Δ, et holomorphes dans l'intérieur de Δ. D'après Turritin et Wasow, les théorèmes 7.1 et 10.3 sont encore vrais lorsqu'on y remplace $\mathscr{E}$ par $\mathscr{A}\,(\Delta)$, et $K\mathscr{E}$ par $K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{A}\,(\Delta)$ pourvu que $\mu\,(\Delta)$ soit assez petit (pour le théorème 7.1, il suffit qu'on ait $\mu\,(\Delta) < \dfrac{\pi}{k}$); à vrai dire, ces auteurs travaillent avec des « fonctions holomorphes dans un secteur ouvert, admettant un développement asymptotique en 0 », et non avec $\mathscr{A}\,(\Delta)$, mais le lecteur vérifiera facilement qu'il s'agit là d'une modification inoffensive.

La démonstration, sous ces nouvelles hypothèses, est presque la même que la précédente, et même plus simple: en effet, on démontre directement 8.2 sous l'hypothèse « $\lambda_j \neq 0$ » (voir Wasow [1]); pour établir 7.1, on n'a alors plus besoin de « systèmes standard », et il suffit d'une double récurrence sur $(m, i\,(D))$. La démonstration ainsi esquissée est d'ailleurs celle que donne Wasow à la simplification près qu'apporte la transformation de Katz. Quant aux énoncés relatifs au développement asymptotique des solutions d'une équation différentielle, ils sont une conséquence facile de cette version du théorème 10.3; nous laissons cette question au lecteur.