

§6. — Points singuliers réguliers

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Cette dernière application est injective pour p assez grand, puisque $\ker (x^k D, \hat{\mathcal{O}}^m)$ est de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Donc son indice est ≤ 0 , et il est nul si et seulement si l'application est surjective. Dans ce dernier cas, par passage au quotient, l'application $x^k D$ de $\hat{m}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) / \hat{m}^{p+1}(\hat{\mathcal{O}}^m)$ dans lui-même sera encore surjective; or dans la base évidente, la matrice de cette application est précisément M_{-k} ; donc M_{-k} doit être surjective, donc inversible. D'où la proposition.

Signalons pour terminer, sans démonstration, une autre manière de définir $i(D)$, due à Gérard et Levelt [1]. On prend un réseau E et on forme la suite de réseaux E_p définie par $E_0 = E, \dots, E_p = E_{p-1} \oplus D E_{p-1}$ (le fait qu'on obtienne bien ainsi deux réseaux résulte facilement de la formule $D(\varphi F) = \varphi D F + (\partial \varphi) F, \varphi \in \hat{\mathcal{O}}$); posons ensuite $\bar{E}_p = E_p / E_{p-1}$. L'application D induit une application surjective $\bar{D}: \bar{E}_p \rightarrow \bar{E}_{p+1}$, donc $\dim_{\mathbf{C}} \bar{E}_p$ est décroissante, et indépendante de p pour p assez grand. On démontre que cette dimension ne dépend pas non plus de E , et qu'elle est précisément égale à $i(D)$.

Supposons en particulier que 0 soit un point singulier régulier: on aura alors $\bar{E}_p = 0$ pour p assez grand; en fait, on démontre même qu'on a nécessairement, quel que soit $E: \bar{E}_m = 0$, donc $D E_{m-1} \subset E_{m-1}$; ceci donne un critère simple pour reconnaître effectivement si l'on est dans le cas d'un point singulier régulier (ce critère se trouve déjà, au moins implicitement, dans Manin [1]. Un critère différent se trouve dans Moser [1]).

§ 6. — POINTS SINGULIERS RÉGULIERS

Ce paragraphe est en grande partie composé de rappels, empruntés à Wasow [1]. On pourra trouver un exposé plus systématique dans Manin [1].

Traisons d'abord le cas formel; soit $D = x \frac{d}{dx} - M$, avec, $M \in \text{End}(\hat{\mathcal{O}}^m)$ (i.e. $M \in \text{End}(\hat{K}^m)$, sans pôle).

Proposition 6.1. *Supposons que deux valeurs propres distinctes de $M(0)$ ne diffèrent jamais d'un entier. Il existe alors un et un seul $A \in \text{End}(\hat{\mathcal{O}}^m)$, avec $A(0) = I$ tel que la transformation $F = A G$ transforme D en*

$$D' = x \frac{d}{dx} - M(0).$$

Posons en effet $M = \sum_0^\infty M_p x^p$, $A = \sum_0^\infty A_p x^p$, avec $A_0 = I$; on doit résoudre l'équation

$$x \frac{dA}{dx} = M A - A M_0$$

en égalant les coefficients de x^p dans les deux membres, on trouve d'abord $M_0 A_0 - A_0 M_0 = 0$ qui est vérifié, et ensuite, pour $p \geq 1$

$$(pI - M_0) A_p + A_p M_0 = \Phi(A_0, \dots, A_{p-1}; M_0, \dots, M_p)$$

On pourra résoudre ces équations par récurrence, d'une manière et d'une seule, en vertu du lemme suivant, qu'on laisse au lecteur à titre d'exercice.

Lemme 6.2. Soient $P \in \text{End } \mathbf{C}^p$ et $Q \in \text{End } \mathbf{C}^q$ donnés; pour que l'équation $PX - XQ = Y$, avec $X, Y \in \text{End}(\mathbf{C}^q, \mathbf{C}^p)$ ait une solution X et une seule quel que soit Y il faut et il suffit que P et Q n'aient pas de valeur propre commune.

La proposition résulte immédiatement de là. Remarquons aussi que l'opérateur différentiel $A \mapsto x \frac{dA}{dx} - MA + AM_0$ a un point singulier régulier en 0; par suite, en vertu des théorèmes de comparaison (ou d'un résultat classique, dans ce cas particulier), si M est convergente, A sera aussi convergente.

Montrons ensuite comment on peut ramener le cas général au cas où $M(0)$ satisfait les hypothèses de la proposition 6.1; soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de M_0 ; il suffit de montrer qu'on peut faire une transformation $A \in \text{Gl}(m, \hat{K})$ telle que $N = A^{-1} M A - x A^{-1} \frac{dA}{dx}$ soit sans pôle et ait comme valeurs propres $(\lambda_1 - 1), \lambda_2, \dots, \lambda_p$: en appliquant par récurrence ce procédé, on amènera les valeurs propres de $M(0)$ qui diffèrent d'un entier à être égales.

Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'on a $M(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, avec P et Q triangulaires inférieures, P ayant pour valeurs propres $\lambda_2, \dots, \lambda_p$, et Q ayant l'unique valeur propre λ_1 ; soient p et q respectivement l'ordre de P et l'ordre de Q ; on prend avec des notations évidentes

$$A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & xI_q \end{pmatrix}.$$

En posant $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on trouve $N(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ \gamma & Q - I \end{pmatrix}$; cette matrice est encore triangulaire inférieure, et a visiblement les valeurs propres cherchées; d'où le résultat.

Passons maintenant au cas $\mathcal{C}^\infty$; nous emploierons les notations suivantes, dans la fin de ces exposés: $\mathcal{E}$ désigne l'espace des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}$, à valeurs complexes (ou à valeurs réelles, dans quelques cas où ce sera explicitement mentionné); l'application $\mathcal{E} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ qui à f associe sa série de Taylor en 0 sera notée $f \mapsto \hat{f}$. On pose encore $K\mathcal{E} = K \otimes \mathcal{E}$, espace des germes en 0 de « fonctions semi-méromorphes »; l'application $\mathcal{E} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ s'étend alors en une application $K\mathcal{E} \rightarrow \hat{K}$, et il est bien connu que ces applications sont surjectives. Si $f \in K\mathcal{E}$, $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}$, on a $f \in \mathcal{E}$ à cause du lemme élémentaire suivant: soit $g \in \mathcal{E}$, avec $g(0) = 0$; alors $\frac{g}{x} \in \mathcal{E}$. Les $f \in \mathcal{E}$ qui vérifient $\hat{f} = 0$ seront dites « plates ».

Si l'on a $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, M à coefficients dans $K\mathcal{E}$, on posera $\hat{D} = x^{k+1} \frac{d}{dx} - \hat{M}$, $i(\hat{D}) = i(D)$; si $i(D) = 0$, on dira que 0 est un point singulier régulier de D .

La proposition suivante est un cas particulier d'un théorème qui sera démontré par la suite.

Proposition 6.3. Soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End}(K\mathcal{E}^m)$ $k \in \mathbb{Z}$ et $i(D) = 0$; soit $G \in K\mathcal{E}^m$ donné; supposons qu'il existe $\hat{H} \in \hat{K}^m$, avec $\hat{D}\hat{H} = \hat{G}$. Alors il existe $F \in K\mathcal{E}^m$ vérifiant $DF = G$, $\hat{F} = \hat{H}$, et un tel F est unique.

Prenons $F_1 \in K\mathcal{E}^m$ tel qu'on ait $\hat{F}_1 = \hat{H}$, et cherchons F sous la forme $F_1 + F_2$, avec F_2 plat; on doit aussi avoir $DF_2 = G - DF_1$, et le second membre est plat par hypothèse. Par conséquent, on peut supposer qu'on est dans le cas suivant: G est plat et $H = 0$ (i.e. on cherche F plat).

Comme une fonction plate le reste après multiplication par x^l ($l \in \mathbb{Z}$), on peut d'abord se ramener à $k = 1$; on peut ensuite, au moyen d'une transformation $F = AF'$, $A \in \text{GL}(m, K\mathcal{E})$ (ensemble des matrices d'ordre m inversibles à coefficients dans $K\mathcal{E}$), et en utilisant les transformations

formelles qui précèdent, se ramener au cas où l'on a $M = M_0 + M_\infty$, M_0 constante et M_∞ plate.

Enfin, il suffit de trouver F à droite de 0 et tendant vers 0 ainsi que toutes ses dérivées en 0 (nous dirons qu'une telle F est « plate à droite en 0 »); on fera ensuite la même opération à gauche, en changeant x en $-x$.

Posons alors $F = \exp(M_0 \log x) F_1$, $G = \exp(M_0 \log x) G_1$; il est clair par l'expression explicite de $\exp(M_0 \log x)$ pour M_0 triangulaire, que F et F_1 seront simultanément plates à droite en 0, et de même pour G et G_1 . On est ramené à l'équation

$$x \frac{dF_1}{dx} - N_\infty F_1 = G_1, \text{ avec } N_\infty = \exp(-M_0 \log x) M_\infty \exp(M_0 \log x),$$

donc N_∞ est plate à droite en 0; en divisant par x , on est ramené au théorème d'existence et d'unicité usuel. D'où la proposition.

Corollaire 6.4. Soit $D = x \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End}(K \mathcal{E}^m)$, et supposons que 0 soit un point singulier régulier. Il existe alors $A \in \text{GL}(m, K \mathcal{E})$ tel que la transformation $F = AF'$ transforme D en $D' = x \frac{d}{dx} - N$, avec N constant.

Comme ci-dessus, on peut supposer $M = M_0 + M_\infty$, avec M_0 constant, M_∞ plat. Considérons alors l'équation

$$x \frac{dA}{dx} = MA - AM_0, \text{ avec } A \text{ à coefficients dans } \mathcal{E}, A(0) = I.$$

Cette équation admet pour solution formelle I ; d'après 6.3, elle admet donc une solution A , avec $\hat{A} = I$; d'où le résultat.

On déduit immédiatement de ce corollaire, l'expression générale d'une matrice fondamentale d'un système à points singuliers réguliers, et à coefficients $\mathcal{E}^\infty$ au voisinage de 0.

§ 7. — LE CAS $\mathcal{E}^\infty$: ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Soit k un entier; soit d'autre part Φ une fonction de classe $\mathcal{E}^\infty$ des $m+1$ variables x et $Y = (y_1, \dots, y_m)$, définie au voisinage de $(0, Y^0)$, et à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; notons $\hat{\Phi}$ son développement de Taylor en $(0, Y^0)$.