

## §2. — Autres théorèmes de comparaison

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

est exacte et  $\ker (D, \mathcal{H})$  est localement isomorphe à  $\mathbf{C}^m$  (théorème d'existence et d'unicité usuel); par suite l'application  $D : \mathcal{H}(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*)$  a pour indice  $m(1 - b_*^1)$ ,  $b_*^1 = \dim H^1(\Omega^*, \mathbf{C})$ .

D'autre part, pour chaque  $a \in Z$ , soit  $\Delta_a$  un disque ouvert centré en  $a$ , avec  $\Delta_a \in \Omega$ ,  $\Delta_a \cap \Delta_b = \emptyset$  si  $a \neq b$ . Comme  $H^1(\Omega, \mathcal{H}) = 0$ , on a

$$\mathcal{H}(\Omega^*) / \mathcal{H}(\Omega) \simeq \bigoplus_{a \in \Delta_a} \mathcal{H}(\Delta_a^*) / \mathcal{H}(\Delta_a), \text{ avec } \Delta_a^* = \Delta_a - \{a\}.$$

On a  $\chi(D, \mathcal{H}(\Delta_a^*)) = 0$  par le raisonnement précédent, et  $\chi(D, \mathcal{H}(\Delta_a)) = m - v(a_m, a)$  (par passage à la limite projective, à partir de 1.2.) On conclut alors en utilisant la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*) / \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow 0.$$

## § 2. — AUTRES THÉORÈMES DE COMPARAISON

Nous reprenons les hypothèses de la proposition 1.1.

### *Théorème 2.1.*

- a) L'application  $D : K \rightarrow K$  est à indice et l'on a  $\chi(D, K) = -i(D)$ .
- b) L'application  $D : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$  est à indice, et l'on a  $\chi(D, \hat{K}) = 0$ .
- c) On a  $\text{coker}(D, \hat{K}/K) = 0$  et  $\dim \ker(D, \hat{K}/K) = i(D)$ .

L'assertion c) résulte de 1.4 et de l'isomorphisme naturel  $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/K$ . Les assertions a) et b) vont résulter du lemme suivant:

*Lemme 2.2.* L'application  $D : K/\mathcal{O} \rightarrow K/\mathcal{O}$  a pour indice  $-\sup[p - v(a_p)]$ .

Désignons en effet par  $K_{-p}$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $K$ , avec  $v(f) \geq -p$ ; un calcul analogue à celui de la proposition 1.3 fait avec les puissances négatives de  $x$  montre qu'on a, avec  $n = \sup[p - v(a_p)]$ :  $DK_{-p} \subset K_{-p-n}$ , et que, pour  $p$  assez grand, l'application  $D : K/K_{-p} \rightarrow K/K_{-p-n}$  est un isomorphisme. Le lemme en résulte immédiatement. L'assertion a) résulte alors de 1.1 et 2.2 en utilisant la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow K \rightarrow K/\mathcal{O} \rightarrow 0$ ; l'assertion b) résulte de manière analogue de 1.3 et 2.2, et de l'isomorphisme  $K/\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/\hat{\mathcal{O}}$ .

Soit  $S_n$  l'espace des fonctions holomorphes dans la couronne  $0 < |x| < r$ , et  $S = \bigcup_{r>0} S_r$ . On a le résultat suivant (cf. Deligne [1], prop. II.6.20).

*Théorème 2.3. Même énoncé que 2.1 avec  $\hat{K}$  remplacé par  $S$ .*

L'assertion a) coïncide avec celle de 2.1. D'autre part, il résulte de la remarque 1.7 que  $r$  assez petit, on a  $\chi(D, S_r) = 0$ ; le fait qu'on ait  $\chi(D, S) = 0$  s'en déduit par passage à la limite inductive.

Pour démontrer l'assertion  $\text{coker}(D, S/K) = 0$ , il suffit de démontrer ceci: désignons par  $K_r$  le sous-espace de  $S_r$  formé des fonctions méromorphes en 0; alors, pour  $r$  assez petit, on a  $S_r = D S_r + K_r$ ; or cela résulte du fait que  $K_r$  est dense dans  $S_r$  (muni de sa topologie usuelle de Fréchet) et de ce que  $D S_r$  est de codimension finie dans  $S_r$ , donc fermé d'après un lemme classique.

L'assertion «  $\dim \ker(D, S/K) = i(D)$  » se démontre alors en utilisant les précédents et la suite exacte de cohomologie, comme l'assertion 1.4.2; d'où le théorème.

Par exemple, si  $D f = x^2 \frac{df}{dx} - f$ , une base de  $\ker(D, S/K)$  est  $f_1 = e^{-1/x}$ ; comme  $f_1$  provient d'un élément de  $\ker(D, S)$  l'application  $\text{coker}(D, K) \rightarrow \text{coker}(D, S)$  est ici bijective.

### § 3. — EXTENSION AUX SYSTÈMES

Il sera commode ici de prendre les systèmes d'abord sous la forme  $F \rightarrow x \frac{dF}{dx} - M F$ ,  $F \in K^m$  (ou  $\hat{K}^m$ , ou  $S^m$ ),  $M$  matrice carrée à coefficients dans  $K$  [on écrira:  $M \in \text{End}(K^m)$ ].

Soit  $A \in \text{Gl}(m, K)$ , i.e.  $A \in \text{End}(K^m)$ ,  $A$  inversible; la transformation  $F = A G$  transforme  $D$  en  $D'$  avec  $D' G = x \frac{dG}{dx} - N G$ ,  $N = A^{-1} M A - x A^{-1} \frac{dA}{dx}$ . Rappelons le résultat suivant (voir Deligne [1] lemme II.1.3).

*Théorème 3.1. Il existe  $A \in \text{Gl}(m, K)$  tel que  $N$  ait la forme suivante*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \lambda_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{m-2} & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$