§ 1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

SUR LE PROBLÈME DE KUMMER

par Carlos Julio MORENO

§ 1. INTRODUCTION

Soit p un nombre premier de la forme $p = 1 + 3t$ et g un générateur du groupe multiplicatif $(Z/pZ)^*$. Soit encore χ le caractère cubique non principal défini par le symbole

$$\chi(k) = \rho^{Indg(k)},$$

où $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et $k = g^{Indg}$ dans $(Z/pZ)^*$. La somme de Gauss pour le caractère χ est donnée par la formule

$$\tau_p = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k)\, e^{\frac{2\pi i k}{p}}. \tag{1}$$

On connaît deux résultats classiques sur la valeur du module de la somme de Gauss ([7] § 20)

A) $$|\tau_p| = p^{\frac{1}{2}}$$

B) $$\tau_p = p^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_p},$$

où les angles θ_p sont bien définis à conjugaison près.

Kummer ([12], [13]) a calculé la valeur numérique de τ_p pour tous les nombres premiers $p \leqq 499$ et a fait l'observation suivante (en utilisant une notation moderne):

Conjecture de Kummer

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p = 1 \, (mod\, 3)}} \chi_h(\theta_p) = \frac{W_h x}{2 \log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad h = 1, 2, 3,$$

où χ_1 (resp. χ_2, χ_3) est la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, \frac{\pi}{3}]$ (resp. $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, $(\frac{2\pi}{3}, \pi]$), et

$$W_h = \begin{cases} \frac{1}{2}, & h = 1 \\ \frac{1}{3}, & h = 2 \\ \frac{1}{6}, & h = 3. \end{cases}$$

Un grand nombre des nouveaux calculs par Goldstine et von Neumann [6], Lehmer [15], et Cassels [1] nous ont conduits à douter de la véracité de la conjecture de Kummer; les mêmes calculs semblent aussi indiquer que les angles θ_p sont équirépartis dans l'intervalle $(0, \pi)$ pour la mesure de Lebesgue. Le but de cette note est de donner une démonstration du résultat suivant.

Théorème. Soit χ_I *la fonction caractérisitique d'un sous-intervalle* I *de* $(0, \pi]$, *alors*

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p = 1 (mod\ 3)}} \chi_I (3\theta_p) = \frac{|I| x}{2 \log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où $|I|$ *est la mesure de Lebesgue de* I.

Remarque. Le Théorème a été énoncé comme une loi de distribution des nombres premiers mais on peut dire simplement que les angles de la troisième puissance de τ_p sont équirépartis dans l'intervalle $(0, \pi]$ pour la mesure de Lebesgue.

§ 2. Démonstration du théorème

L'idée de la démonstration a été déjà considérée par Davenport-Hasse [4] et aussi par Weil [21]. Elle consiste à interpréter les sommes de Gauss comme des traces d'opérateurs de Frobenius.

Soit $E = Q(\rho)$ le corps quadratique imaginaire obtenu en adjoignant $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ à Q et J_E son anneau d'entiers. L'arithmétique de J_E est bien connue et on sait que les nombres premiers dans J_E appartiennent a deux classes selon que la norme est un nombre premier rationnel ou le carré d'un nombre premier rationnel. Dans ce paragraphe, nous décrirons une construction locale des sommes de Gauss. Soit $\mathfrak{q}$ un nombre premier de J_E, $F\mathfrak{q}$ son corps résiduel et $N_{E/Q}(\mathfrak{q}) = q$ l'ordre de $F\mathfrak{q}$. Il est très facile de voir que $q \equiv 1 \pmod 3$, ce qui permet de construire un caractère cubique multipli-