5. Le conjecture-théorème de Brauer/Thrall-Nazarova/Roiter ([7]).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

pour tout i. Nous nous intéressons ici aux représentations indécomposables, c'est-à-dire aux représentations non nulles qui ne sont pas somme directe de 2 sous-représentations non nulles.

Kleiner, Nazarova et Roiter ont pu montrer que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables était infini si et seulement si **O** contenait un sous-ensemble ordonné plein (c'est-à-dire muni de l'ordre induit) de l'un des types suivants:

$\{1, 2, 3, 4\}$ (4 points incomparables deux à deux)

$\{1 < 2, 3 < 4, 5 < 6\}$ (3 couples incomparables d'éléments comparables)

$\{1 < 2 < 3, 4 < 5 < 6, 7\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4 < 5, 6 < 7, 8\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4, 5 < 6 > 7 < 8\}$.

Cet énoncé joue un rôle essentiel dans leur démonstration des conjectures de Brauer-Thrall, dont nous allons donner le principe.

5. Le conjecture-théorème de Brauer/Thrall-Nazarova/Roiter ([7]).

Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos k. Pour tout entier naturel n, nous posons $v_A(n)$ = nombre de classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables de k-dimension n. La conjecture de Brauer-Thrall dit que, *si* $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$ *est infini, il y a une infinité de* n *tels que* $v_A(n) = \infty$. En 1968 Roiter a pu fournir un premier élément de réponse à cette conjecture en montrant de manière simple et élégante que si $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$ est infini, il y a une infinité de n tels que $v_A(n) \neq 0$. Une démonstration complète de la conjecture de Brauer-Thrall n'a été publiée qu'en 1974 par Nazarova et Roiter. La démonstration reste technique et épineuse. Nous en développons seulement le principe:

Raisonnant par récurrence sur la dimension de A, nous pouvons supposer que $\sum_n v_B(n) < \infty$ pour tout vrai quotient B de A, et que $v_A(n) < \infty$ pour presque tout n. Il s'agit alors de montrer que $\sum_n v_A(n) < \infty$.

Pour cela nous choisissons un idéal à gauche minimal S de A et, pour tout A-module M, nous notons $S(M)$ la somme des sous-modules de M isomorphes à S. Dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow S(M) \longrightarrow M \longrightarrow M / S(M) \longrightarrow 0$$

$M/S(M)$ est un module sur l'anneau résiduel $A' = A/S(A)$. Si nous fixons la classe d'isomorphisme T de $S(M)$ et la classe M' de $M/S(M)$, nous obtenons ainsi une injection

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'iso. de } A\text{-modules } M \text{ telles} \\ \text{que } S(M) \simeq T \text{ et } M/s(M) \simeq M'\end{array}\right\} \longrightarrow \operatorname{Aut} T \backslash \operatorname{Ext}^1_A(M', T)/\operatorname{Aut} M',$$

où l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des orbites du groupe $\operatorname{Aut} T \times (\operatorname{Aut} M')^{op}$ dans le groupe des extensions de T par M'. L'image de l'injection est formée des classes d'extensions E telles que $T \simeq S(E)$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'iso. de } A\text{-modules } M \text{ telles} \\ \text{que } S(M) \simeq T \text{ et } M/S(M) \simeq M\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut} T \backslash \operatorname{Ext}^1_A(M', T)/\operatorname{Aut} M'$$

lorsque $S(M') = 0$, ce qui est toujours le cas si $\operatorname{Ext}^1_A(S, S) = 0$.

Pour simplifier nous supposons dans toute la suite du raisonnement que $\operatorname{Ext}^1_A(S, S) = 0$.

Le module semi-simple T peut s'écrire sous la forme $T = S \otimes_k V$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a alors $\operatorname{Aut} T = \operatorname{Aut} V$ et

$$\operatorname{Ext}^1_A(M', T) = \operatorname{Ext}^1_A(M', S \otimes V) \simeq \operatorname{Ext}^1_A(M', S) \otimes_k V \simeq$$
$$\simeq \operatorname{Hom}_k\left(V^*, \operatorname{Ext}^1_A(M', S)\right).$$

Cette dernière formule a l'avantage de bien mettre en évidence l'opération de $\operatorname{Aut} V$. On voit par exemple que deux applications linéaires $f, g \in \operatorname{Hom}_k(V^*, \operatorname{Ext}^1_A(M', S))$ appartiennent à la même orbite de $\operatorname{Aut} V$ si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$.

Pour pouvoir également tenir compte de l'action de $\operatorname{Aut} M'$ Nazarova et Roiter sont amenés à introduire la catégorie « vectorielle » **V** qui suit: les objets de **V** sont les A'-modules de longueur finie; si M' et M'_1 sont deux tels objets, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{V}}(M', M'_1)$ est l'image de $\operatorname{Hom}_A, (M'_1, M')$ dans $\operatorname{Hom}_k(E_{M'}, E_{M'_1})$ lorsque l'on pose $E_{M'} = \operatorname{Ext}^1_A(M', S)$.

La catégorie **V** est additive, k est contenu dans l'anneau des endomorphismes du foncteur identique, chaque objet de **V** est une somme directe finie d'indécomposables, le nombre de classes d'isomorphisme d'indé-

composables est fini, et l'anneau des endomorphismes d'un indécomposable est local. En outre, la catégorie $\mathbf{V}$ est reliée à celle des k-espaces vectoriels de dimension finie par un foncteur k-linéaire fidèle $E : M' \mapsto E_{M'}$. Nous résumerons ces propriétés en disant avec Nazarova et Roiter que le couple $(\mathbf{V}, E)$ est une *catégorie vectorielle.*

Lorsque $(\mathbf{V}, E)$ est une catégorie vectorielle, nous pouvons considérer les couples (M', V) formée d'un objet M' de $\mathbf{V}$ et d'un sous-espace vectoriel V de $E(M')$. On obtient un tel couple en associant par exemple à tout $f \in \mathrm{Hom}_k(V^*, \mathrm{Ext}^1_A(M', S))$ le sous-espace $\mathrm{Im} f$ de $E_{M'} = \mathrm{Ext}^1_A(M', S)$. Ces couples forment eux-mêmes une catégorie additive. Pour tout $M' \in \mathbf{V}$, nous désignons par $\nu(M')$ le nombre de classes d'isomorphisme de couples indécomposables de la forme (M', V).

La conjecture de Brauer-Thrall résulte alors de l'énoncé suivant de Nazarova et Roiter:

THÉORÈME. *Soit* $(\mathbf{V}, E)$ *une catégorie vectorielle telle que* $\nu(M') < \infty$ *pour presque tout objet* M' *de* V. *Alors* $\sum_{M' \in \mathbf{V}} \nu(M') < \infty$.

Pour démontrer ce théorème, Nazarova et Roiter montrent d'abord combien l'hypothèse est draconienne. Elle implique par exemple que $\dim_k E(M') \leqq 3$ pour tout indécomposable $M' \in \mathbf{V}$. Il réduisent ensuite le problème au cas où $\dim_k E(M') \leqq 1$. Dans ce dernier cas on retrouve le problème du paragraphe 4. Soit en effet $\mathbf{O}$ l'ensemble des classes d'indécomposables de $\mathbf{V}$. Pour tout $i \in \mathbf{O}$, soient M_i un représentant de la classe i et $k_i = E(M_i)$. On définit une relation d'ordre sur $\mathbf{O}$ en posant $i \geqq j$ lorsque $\mathrm{Hom}_{\mathbf{V}}(M_i, M_j) \neq 0$.

A tout couple (M', V) est alors associé une représentation linéaire de $\mathbf{O}$ d'espace sous-jacent V. Il suffit de poser

$$V(j) = V \cap E(M')(j) \text{ et } E(M')(j) = \sum \mathrm{Im}\, E(f),$$

où f parcourt les morphismes $M_i \to M'$ de V tels que $j \not\leqq i$. Il reste alors à voir, ce qui est relativement facile, que l'application $(M', V) \mapsto (V(j))_{j \in \mathbf{O}}$ induit une bijection

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'isomorphisme}\\ \text{de couples indécompo-}\\ \text{sables } (M', V) \text{ tels que}\\ V \neq 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{l}\text{classes d'isomorphisme}\\ \text{de représentations liné-}\\ \text{aires indécomposables}\\ \text{de } \mathbf{O}\end{array}\right\}$$