

## 2. The congruence $y^2 \equiv (x^4 - a) \pmod{p}$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

since  $x^2 - a \equiv 0 \pmod{p}$  is not solvable. This gives one solution  $(0, 0)$ . Let now  $x = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}$ , be a complete non-zero residue system mod  $p$ . Of  $x^3 - ax$  and  $(-x)^3 - a(-x) = -(x^3 - ax)$  one is a quadratic residue and the other a non-residue since  $-1$  is a non-residue,  $p$  being  $\equiv 3 \pmod{4}$ . Hence as  $x$  takes the values  $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}$ ,  $x^3 - ax$  becomes a quadratic residue  $\frac{p-1}{2}$  times (perhaps with repetitions) and a non-residue  $\frac{p-1}{2}$  times. Each time it is a quadratic residue, we get 2 solutions. Hence there exist  $p-1$  solutions, and together with  $(0, 0)$  gives  $p$  solutions as required.

*Case 2.*  $a$  is a quadratic residue mod  $p$ , that is there exists an  $x_0$  such that  $x_0^2 \equiv a \pmod{p}$ . Then corresponding to  $y = 0$  there exist 3 solutions,  $(0, 0), (x_0, 0), (-x_0, 0)$ . Let now  $x = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}$ , but  $\neq \pm x_0$  (or 0) (all together  $p-3$  values). As above  $x^3 - ax$  becomes a quadratic residue exactly  $\frac{p-3}{2}$  times and so there exists  $p-3$  solutions, which together with  $(0, 0), (\pm x_0, 0)$  gives  $p$  solutions as required. To get  $N'$  we note that in this case the biquadratic residues of  $p$  are the same as quadratic residues. Hence the congruence can be written as

$$y^2 \equiv x^2 - a \pmod{p}$$

or  $(x+y)(x-y) \equiv a \pmod{p}$

or  $u.v \equiv a \pmod{p}$

which has  $p-1$  solutions as required. For the case  $p \equiv 1 \pmod{4}$  we shall use results from cyclotomy for the factorization  $p-1 = 4f$ .

## 2. THE CONGRUENCE $y^2 \equiv (x^4 - a) \pmod{p}$

Let  $\left(\frac{t}{p}\right)$  be the Legendre symbol. The number of solutions of  $y^2 \equiv x^4$

$$- a \pmod{p} \text{ equals } \sum_x \left[ 1 + \left(\frac{x^4 - a}{p}\right) \right] = p + \sum_x \left(\frac{x^4 - a}{p}\right) = p + S.$$

To get  $S$  we define first the biquadratic character  $\chi$  as follows:

Let  $g$  be a primitive root mod  $p$ . Then for any integer  $m (\neq 0)$  there exists a positive integer  $v$  such that  $m \equiv g^v (p)$ . We put  $\chi(m) = (i)^v$  where  $i = \sqrt{-1}$  and put  $\chi(0) = 0$ . This defines  $\chi$ . We now have

$$\begin{aligned} S &= \sum_y [1 + \chi(y) + \chi^2(y) + \chi^3(y)] \left(\frac{y-a}{p}\right) \\ &= \sum_y \chi(y) \left(\frac{y-a}{p}\right) + \sum_y \chi^2(y) \left(\frac{y-a}{p}\right) + \sum_y \chi^3(y) \left(\frac{y-a}{p}\right). \end{aligned}$$

Setting  $y = -az$  we get:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{-a}{p}\right) \left[ \sum_{\text{all } z} \chi(-a) \chi(z) \left(\frac{z+1}{p}\right) + \sum_{\text{all } z} \chi^2(-a) \chi^2(z) \left(\frac{z+1}{p}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\text{all } z} \overline{\chi(-a)} \overline{\chi(z)} \left(\frac{z+1}{p}\right) \right], \end{aligned}$$

since  $\chi^3(m) = \overline{\chi(m)}$  for all integers  $m$ .

Now we look at the sum

$$\sum \chi(z) \left(\frac{z+1}{p}\right).$$

This equals

$$\sum_{z+1 = \text{square}} \chi(z) - \sum_{z+1 = \text{not square}} \chi(z).$$

But

$$0 = \sum_{z+1 = \text{square}} \chi(z) + \sum_{z+1 \neq \text{square}} \chi(z) + \chi(-1).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \sum_{z+1 = \text{square not zero}} \chi(z) &= \frac{1}{2} \sum_{u \neq 0} \chi(u^2 - 1) = \frac{1}{2} \sum_{u \neq 0} \chi(u+1) \chi(u-1) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{\text{all } u} \chi(u+1) \chi(u-1) - \chi(-1) \right]. \end{aligned}$$

Now put  $u = 2v + 1$ .

$$\text{Therefore } \sum_{z+1 = \text{square not zero}} \chi(z) = \frac{1}{2} \left[ \chi(4) \sum_{\text{all } v} \chi(v) \chi(v+1) - \chi(-1) \right].$$

$$\text{Hence } \sum_{\text{all } z} \chi(z) \left(\frac{z+1}{p}\right) = \chi(4) \sum_{\text{all } v} \chi(v) \chi(v+1).$$

Similarly for  $\chi^2$  and  $\bar{\chi}$  and therefore we get

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{-a}{p}\right) \left[ \chi(-4a) \sum_{\text{all } v} \chi(v) \chi(v+1) + \bar{\chi}(-4a) \sum_{\text{all } v} \bar{\chi}(v) \bar{\chi}(v+1) \right. \\ &\quad \left. + \chi^2(-4a) \sum_{\text{all } v} \chi^2(v) \chi^2(v+1) \right]. \end{aligned}$$