3.1. Un système hyperbolique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

3. Cas linéaire quadratique — Remarques sur le système d'optimalité

3.1. *Un système hyperbolique*

On reprend ici certains points de Lions [3]: dans un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$ de frontière Γ régulière, on considère l'opérateur A défini par:

$$A\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tag{3.1}$$

où les fonctions $a_i \in C^1(\overline{\Omega})$; [on pourrait aussi bien considérer des fonctions dépendant de x et t; nous nous bornons au cas où les a_i ne dépendent pas de t uniquement pour un peu simplifier l'exposé]. On introduit:

$$\Gamma_- = \{x \mid x \in \Gamma \,,\ \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \nu_i \leqslant 0\}$$

$$\Gamma_+ = \{x \mid x \in \Gamma \,,\ \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \nu_i \geqslant 0\}$$

où $\nu = \{\nu_i\}$ désigne la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω.

On suppose que l'*état* $y = y(v) = y(x, t; v)$ du système est défini par la solution du *problème mixte hyperbolique*:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + v \text{ dans } Q = \Omega \times \,]0, T[, \tag{3.2}$$

$$y = 0 \text{ sur } \Sigma_- = \Gamma_- \times \,]0, T[, \tag{3.3}$$

$$y(x, \mathrm{o}) = y_0(x)\,,\ x \in \Omega \tag{3.4}$$

où f et y_0 sont donnés avec:

$$f \in L^2(Q)\,,\ y_0 \in L^2(\Omega) \tag{3.5}$$

et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ avec:

(3.6) $\qquad \mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

Remarque 3.1.

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué.* (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût est donnée par*:

(3.7) $$J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt + N \int_Q v^2 \, dx \, dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$ et où N est donné > 0.

Le problème

(3.8) $$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

admet une solution unique (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. *Système d'optimalité*

Soit u la solution de (3.8). On pose $y(u) = y$ et l'on définit l'*état adjoint* p par [1]:

(3.9) $$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = y - z_d,$$

(3.10) $$p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times]0, T[,$$

(3.11) $$p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le contrôle u est *caractérisé* par:

(3.12) $$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) \, dx \, dt + N \int_Q u(v - u) \, dx \, dt \geqslant 0, \ \forall \, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) \, dx \, dt = \int_Q p(v - u) \, dx \, dt$$

---

[1]) A^* est défini par $A^* \varphi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \varphi)$.