

## 3.1. Un système hyperbolique

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### 3. CAS LINÉAIRE QUADRATIQUE — REMARQUES SUR LE SYSTÈME D'OPTIMALITÉ

#### 3.1. Un système hyperbolique

On reprend ici certains points de Lions [3]: dans un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  régulière, on considère l'opérateur  $A$  défini par:

$$(3.1) \quad A\varphi = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

où les fonctions  $a_i \in C^1(\bar{\Omega})$ ; [on pourrait aussi bien considérer des fonctions dépendant de  $x$  et  $t$ ; nous nous bornons au cas où les  $a_i$  ne dépendent pas de  $t$  uniquement pour un peu simplifier l'exposé]. On introduit:

$$\Gamma_- = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i \leq 0\}$$

$$\Gamma_+ = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i \geq 0\}$$

où  $\nu = \{\nu_i\}$  désigne la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

On suppose que l'état  $y = y(v) = y(x, t; v)$  du système est défini par la solution du *problème mixte hyperbolique*:

$$(3.2) \quad \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + v \text{ dans } Q = \Omega \times ]0, T[$$

$$(3.3) \quad y = 0 \text{ sur } \Sigma_- = \Gamma_- \times ]0, T[$$

$$(3.4) \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega$$

où  $f$  et  $y_0$  sont donnés avec:

$$(3.5) \quad f \in L^2(Q), \quad y_0 \in L^2(\Omega)$$

et où  $v \in \mathcal{U}_{ad}$  avec:

$$(3.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(Q).$$

*Remarque 3.1.*

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué*. (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût* est donnée par:

$$(3.7) \quad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + N \int_Q v^2 dx dt,$$

où  $z_d$  est donnée dans  $L^2(Q)$  et où  $N$  est donné  $> 0$ .

Le problème

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \inf J(v) \\ & v \in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned}$$

admet une *solution unique* (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

### 3.2. *Système d'optimalité*

Soit  $u$  la solution de (3.8). On pose  $y(u) = y$  et l'on définit l'*état adjoint*  $p$  par <sup>1)</sup>:

$$(3.9) \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = y - z_d,$$

$$(3.10) \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times ]0, T[,$$

$$(3.11) \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le *contrôle*  $u$  est *caractérisé* par:

$$(3.12) \quad \int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt + N \int_Q u(v - u) dx dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt = \int_Q p(v - u) dx dt$$

<sup>1)</sup>  $A^*$  est défini par  $A^* \varphi = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \varphi)$ .