Notes sur le chapitre 9

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

$$(5.3.5) \quad Z(V_6; t) = 1/(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-\pi_2 t)^3(1-\bar{\pi}_2 t)^3,$$

V_6 désignant la surface cubique étudiée. Ce résultat est conforme aux conjectures de Weil: on a $P_0(t) = 1 - t$, $P_1(t) = P_3(t) = 1$, $P_4(t) = 1 - q^2t$, et $P_2(t) = (1-qt)(1-\pi_2 t)^3(1-\pi_2 t)^3$; l'hypothèse de Riemann se réduit à $|\pi_2| = |\bar{\pi}_2| = |\pi(\chi, \chi, \bar{\chi})| = q$ (chap. 5, prop. 10, cor. 1, (ii)); la « caractéristique d'Euler-Poincaré » est égale à $1 + 7 + 1 = 9$, et l'équation fonctionnelle s'écrit $Z(V_6; 1/q^2t) = -q^9t^9Z(V_6; t)$.

Notes sur le chapitre 9

§ **1-2-3-4**: l'idée d'étudier arithmétiquement un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini semble apparaître nettement pour la première fois chez Dedekind (1857). Mais c'est dans la thèse d'Artin (1924), puis dans les travaux de Schmidt (1931) et Hasse (1933, 1934, 1936), qu'est définie la notion de fonction zêta (« Kongruenzzetafunktion ») et formulée l'« hypothèse de Riemann » en caractéristique p (Artin, Schmidt, Hasse utilisent le langage des corps de fonctions algébriques d'une variable, et non celui des courbes: mais ces deux langages sont équivalents, ou plutôt, le sont devenus depuis les « Foundations » de Weil; voir d'ailleurs Weil (1949), *Introduction*). L'équation fonctionnelle pour $\zeta(V; s)$ (c'est-à-dire, aux notations près, la proposition 3) est due à Schmidt (1931); la démonstration de l'hypothèse de Riemann pour $g = 1$ est due à Hasse (1933, 1934), et, pour g quelconque, à Weil (1940; 1948, a). Les diverses définitions de $Z(V; t)$ données au paragraphe 1 figurent, pour une courbe, dans Weil (1948, a), et, pour une variété projective non singulière de dimension quelconque, dans Weil (1949); cet article contient également l'énoncé (et, pour des cas particuliers, la vérification) des « conjectures de Weil ». L'existence d'une « formule de Lefschetz » en géométrie algébrique est conjecturée dans Weil (1954) (p. 556): d'où la notion de « cohomologie de Weil » — cette terminologie étant d'ailleurs considérée par Weil lui-même comme « tout à fait inadéquate » (*wholly unsuitable*). Au sujet du lien formel entre théories cohomologiques des variétés algébriques et propriétés des fonctions zêta, voir Demazure (1969), notamment §§ 7 et 9. Au sujet du lien entre méthodes p-adiques et méthodes cohomologiques, voir Katz (1972) (cet exposé contient une abondante bibliographie).

Signalons qu'à côté des fonctions zêta, on peut (comme en arithmétique) construire, pour les variétés algébriques, des « séries L »; pour une définition générale (en langage des schémas, et englobant d'ailleurs les séries L de la théorie des nombres), voir [**16**], pp. 86-91. La rationalité des séries L des variétés algébriques a été établie par Grothendieck (1964, b); voir également Dwork (1966, b). Pour l'application de ce résultat à l'étude des sommes exponentielles, voir notamment Bombieri (1966).

§ **5**: les exemples de ce paragraphe sont empruntés essentiellement à Davenport-Hasse (1934) et à Weil (1949). Signalons que le lemme 1 (sect. 5.2) peut aussi se démontrer à l'aide de la proposition 9, (ii) (chap. 5), et du résultat suivant, dû à Stickelberger (1890): si χ est un caractère multiplicatif de $\mathbf{F}_{p^2}$, et si θ est un élément primitif de $\mathbf{F}_{p^2}/\mathbf{F}_p$, on a $\tau(\chi \mid \beta) = \chi(\theta) p$, si $p \neq 2$, et $\tau(\chi \mid \beta) = p$ si $p = 2$; pour une démonstration de ce dernier énoncé, voir aussi Carlitz (1956, a).

Pour $V = V_1$ et $q \equiv -1 \pmod 6$, ou $V = V_2{}^*$ et $q \equiv -1 \pmod 4$, ou $V = V_3{}^*$ et $q \equiv -1 \pmod 3$, on a trouvé la même expression

$$Z(V; t) = (1+qt^2)/(1-t)(1-qt);$$

ceci résulte (1) du fait que, dans les trois cas, on a $N_1 = q + 1$, et (2) de la relation $Z(V; t) = (1 + (N_1 - q - 1) t + qt^2)/(1-t)(1-qt)$, valable pour toute courbe V (projective, non singulière) de genre 1, définie sur k et ayant N_1 points rationnels sur k (cette relation se déduit facilement du théorème 3 et du théorème 2, corollaire 1 et remarque). En fait, si deux courbes de genre 1, définies sur k, ont même nombre N_1 de points rationnels sur k, alors, elles ont le même nombre N_m de points rationnels sur k_m pour tout m, puisqu'elles ont même fonction zêta (appliquer la formule ci-dessus !): on peut prouver que ceci se produit si et seulement si les deux courbes sont isogènes sur k (voir [**4**], p. 242, pour la partie « si », et Tate (1966), pour la partie « seulement si ».)

BIBLIOGRAPHIE

1. *Ouvrages généraux, monographies.*

[1] Artin, E. *Geometric Algebra*, Interscience Publishers (1957).
[2] —— *Algebraic Numbers and Algebraic Functions*, Gordon and Breach (1967).
[3] Borevich, Z. I. and I. R. Shafarevich. *Number Theory*, Academic Press (1966).
[4] Cassels, J. W. S. *Diophantine equations with special reference to elliptic curves* (survey article), J. London Math. Soc., 41 (1966), pp. 193-291.
[5] Eichler, M. *Introduction to the theory of algebraic numbers and functions*, Academic Press (1966).
[6] Gel'fand, A. et I. Linnik. *Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres*, Gauthier-Villars (1965).
[7] Greenberg, M. J. *Lectures on forms in many variables*, Benjamin (1969).