1. Introduction

FIBRÉS EN DROITES ET FEUILLETAGES DU PLAN

par Claude GODBILLON

1. INTRODUCTION

Il est bien connu que tout feuilletage $\mathscr{F}$ du plan $\mathbf{R}^2$ possède les propriétés suivantes:

(i) $\mathscr{F}$ est orientable;

(ii) chaque feuille de $\mathscr{F}$ est fermée dans $\mathbf{R}^2$ et homéomorphe à la droite réelle $\mathbf{R}$: Poincaré-Bendixson;

(iii) l'espace des feuilles X de $\mathscr{F}$ est une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexe (en général non séparée): Haefliger-Reeb [2];

(iv) la projection $p: \mathbf{R}^2 \to X$ est une fibration localement triviale: Whitney [4].

Inversement d'ailleurs si X est une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexe, et si $\eta: E \xrightarrow{p} X$ est un fibré localement trivial en droites réelles sur X, l'espace total E est une variété topologique de dimension 2 à base dénombrable et acyclique. Si elle est séparée elle est homéomorphe au plan $\mathbf{R}^2$, et les fibres de η déterminent un feuilletage du plan.

Deux feuilletages (orientés) $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ de $\mathbf{R}^2$ sont *conjugués* s'il existe un homéomorphisme h du plan transformant les feuilles de l'un en les feuilles de l'autre. On peut de plus imposer à l'homéomorphisme h de conserver l'orientation du plan $\mathbf{R}^2$, ou d'être compatible avec les orientations des feuilletages, ou encore d'avoir simultanément ces deux propriétés (cette dernière situation a été étudiée par Kaplan [3]).

Dans chacun de ces cas les espaces des feuilles X et X' de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont homéomorphes, et les fibrés $p: \mathbf{R}^2 \to X$ et $p': \mathbf{R}^2 \to X'$ sont isomorphes [1]).

[1]) Deux fibrés $p: E \to X$ et $p': E' \to X'$ sont *isomorphes* s'il existe des homéomorphismes $F: E \to E'$ et $f: X \to X'$ tels que $p' \circ F = f \circ p$. Lorsque $X = X'$ et $f = id._X$ on dit qu'ils sont *équivalents*.

On peut donc ramener le problème de la classification des feuilletages du plan aux deux problèmes suivants:

(i) classifier les variétés topologiques de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexes;

(ii) classifier sur une telle variété les fibrés en droites localement triviaux ayant un espace total séparé.

2. Un exemple important: le branchement simple [1]

Le *branchement simple* Z est la variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et contractile obtenue à partir de l'espace somme de deux exemplaires R_1 et R_2 de la droite réelle $\mathbf{R}$ en identifiant les points $x_1 \in R_1$ et $x_2 \in R_2$ pour $x_1 = x_2 < 0$.

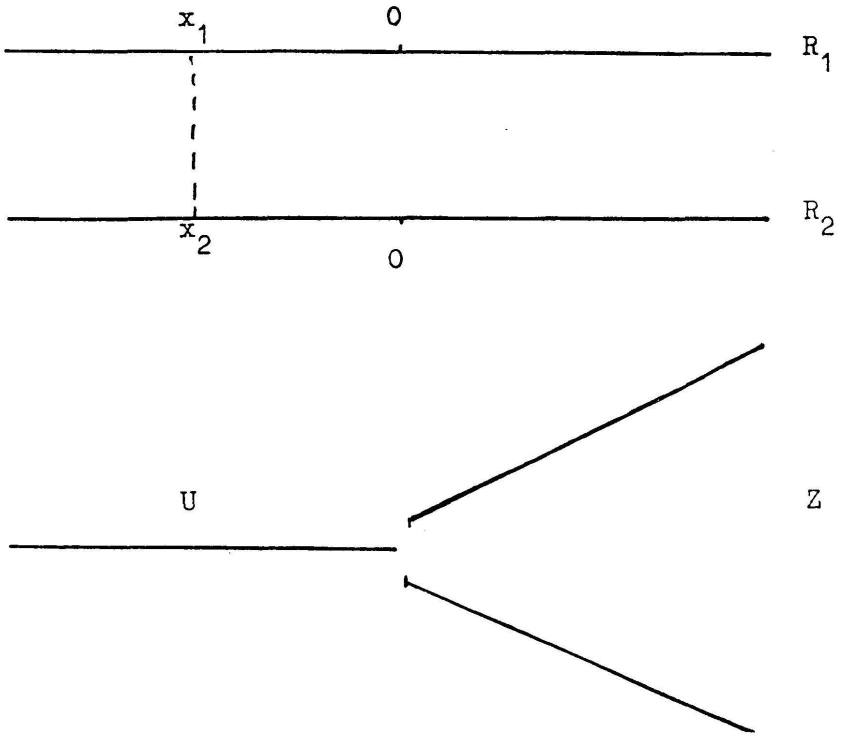

FIG. 1

On identifie à $]-\infty, 0[$ l'ouvert U de Z correspondant aux points $x_1 < 0$ de R_1.

La donnée d'un fibré en droites localement trivial $\eta : E \xrightarrow{p} Z$ sur Z est équivalente à celle d'une application continue g de U dans le groupe G des homéomorphismes de $\mathbf{R}$.