

V. Deuxième choix de E

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Conclusion.

THÉORÈME 1. Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers et qui ne s'annule pas à l'origine. Pour tout $a \geq 2$, il existe une constante C calculable explicitement et qui ne dépend que de $\deg P$, $|P|_2$ et K , telle que si P est réductible alors on a l'inégalité :

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leq C (\text{Log } a)^r .$$

(Où $i_a(P)$ désigne le nombre de points x de hauteur majorée par a et tels que $P(x)$ soit un élément irréductible de A).

Démonstration :

Soient P_1 et P_2 deux polynômes à coefficients dans A et de produit P . D'après le lemme 1, nous avons l'inégalité

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leq u_a(P_1) + u_a(P_2) .$$

Soit S le nombre $2^{d-1} |P|_2$; le lemme 4 montre que $|P_1|_1$ et $|P_2|_1$ sont majorés par S .

Nous pouvons maintenant appliquer les lemmes 5 et 6 aux polynômes P_1 et P_2 . En tenant compte de l'inégalité (1), nous obtenons les majorations

$$\begin{aligned} u_a(P_1) + u_a(P_2) &\leq w C_1 (C_0 \text{Log } a)^r ((\deg P_1)^{r+1} + (\deg P_2)^{r+1}) \\ &\leq 2w C_1 (C_0 \text{Log } a)^r (\deg P)^{r+1} . \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. L'inégalité $a \geq 2$ n'a été introduite que pour éviter des complications inutiles. Le théorème reste vrai pourvu que l'on suppose $a \geq \alpha_0$ avec α_0 fixé, $\alpha_0 > 1$, mais cette fois la constante C dépend de α_0 .

CRITÈRE 1. S'il existe $a \geq 2$ tel que l'on ait l'inégalité

$$i_a(P) + 2u_a(P) > C (\text{Log } a)^r$$

alors le polynôme P est irréductible dans $K[X]$.

V. DEUXIÈME CHOIX DE E

THÉORÈME 2. Soit P un polynôme unitaire réductible qui ne s'annule pas à l'origine et à coefficients dans A . Désignons par S le nombre $2^{d-1} |P|_2$, où d est le degré de P .

Pour tout entier x , dont tous les conjugués sont strictement supérieurs à S , l'élément $P(x)$ est réductible dans A .

Démonstration :

D'après le lemme 4 nous savons que si P_1 désigne un diviseur de P , alors $|P_1|_1$ est majoré par S . Soit alors σ_i un isomorphisme quelconque de K dans \mathbf{C} et soit x un entier dont tous les conjugués sont supérieurs à S . Nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |\sigma_i(P_1(x))| &\geq |\sigma_i(x)|^{d_1} - (|P_1|_1 - 1) |\sigma_i(x)|^{d_1-1} \\ &\geq |\sigma_i(x)|^{d_1-1} (|\sigma_i(x)| + 1 - S) > S^{d_1-1} \geq 1. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout i , la norme de $P_1(x)$ a un module strictement supérieur à 1; autrement dit $P_1(x)$ n'est pas une unité. Si P est égal au produit de P_1 et d'un polynôme P_2 , la même démonstration montre que $P_2(x)$ n'est pas une unité. Dans ces conditions, il est clair que l'élément $P(x)$ est réductible dans l'anneau A .

Du théorème résultent immédiatement les deux critères suivants:

CRITÈRE 2. Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans A et qui ne s'annule pas en zéro et de degré d . S'il existe un élément x entier dont tous les conjugués ont un module strictement supérieur à $2^{d-1} |P|_2$ et tel que l'élément $P(x)$ soit irréductible dans A , alors le polynôme P est irréductible sur K .

CRITÈRE 2'. Avec les mêmes notations que ci-dessus, s'il existe un entier rationnel x de module strictement supérieur à $2^{d-1} |P|_2$ et tel que $P(x)$ soit irréductible dans A , alors le polynôme P est irréductible dans $K[X]$.

RÉFÉRENCE

- [1] MIGNOTTE, M. Un critère d'irréductibilité des polynômes. *Enseignement mathématique*, tome 17 (1971), pp. 213-214.

(Reçu le 24 février 1971)

Maurice Mignotte
Centre Scientifique
Place du 8 mai 45
F-93 - Saint-Denis